

Capitolo 1: Presentazione del problema

1.1 Introduzione

Molte città soffrono della carenza di un sufficiente numero di parcheggi per le automobili. Una possibile soluzione consiste nel trasformare le strade a doppio senso di marcia in strade a senso unico, in modo da riservare parte della carreggiata alla sosta. Questa soluzione è adottata molto spesso, soprattutto nelle zone densamente abitate, perché utilizza spazi già esistenti ma purtroppo causa un disagio alla circolazione. Un problema consiste nello stabilire quali strade è conveniente trasformare in strade a senso unico.

Attualmente la scelta di quali sensi di marcia chiudere è fatta seguendo criteri prevalentemente qualitativi: se la via appartiene al centro, se vi sono negozi o attività commerciali, se vi sono edifici di pubblica utilità oppure se è molto trafficata. Tuttavia il traffico può essere analizzato misurando grandezze come il numero di veicoli per unità di tempo o i tempi di percorrenza delle strade: quindi è ragionevole adottare anche criteri quantitativi, piuttosto che soli criteri architettonici e urbanistici di tipo qualitativo. In particolare il disagio dovuto alla chiusura di alcuni sensi di marcia può essere misurato considerando l'aumento dei tempi necessari per percorrere i cammini minimi nella città.

Gli approcci quantitativi esistenti sono realizzati esclusivamente attraverso la simulazione, avvalendosi ad esempio di appositi prodotti software come Emme/2 [1]. Questi strumenti consentono di osservare come si sviluppa il traffico nella rete stradale modificando parametri quali le dimensioni delle strade, la velocità di percorrenza e la matrice O/D delle origini e destinazioni col relativo numero di utenti. L'analisi considera anche le code dovute a semafori, incidenti, o chiusura di strade. Si tratta perciò di strumenti che cercano di riprodurre l'evoluzione del traffico a seguito di variazioni nella percorribilità delle strade. La simulazione può essere molto dettagliata ma richiede l'effettuazione di molte prove: per trovare una soluzione adatta è necessario ipotizzare molti scenari diversi e confrontare i risultati ottenuti. Il nostro lavoro si propone di affrontare il problema attraverso la programmazione matematica.

Affrontare il problema dal punto di vista della programmazione matematica invece porta a definire un modello matematico del problema. Il modello matematico è meno dettagliato rispetto alla simulazione

perchè altrimenti sarebbe intrattabile nello spazio.

La simulazione e la programmazione matematica non sono alternative, ma complementari. Invece di scegliere le strade da chiudere andando per tentativi, è utile disporre di uno scenario iniziale già ottimizzato rispetto ad un modello semplificato della rete viaria. La soluzione può essere successivamente affinata con una simulazione più dettagliata attraverso l'analisi di diversi possibili scenari. Si può introdurre anche un'ulteriore scambio di informazioni: i tempi di percorrenza ricavati con la simulazione tendono ad essere più affidabili dei dati con cui si è inizialmente risolto il modello. Questo ci suggerisce di risolvere nuovamente il modello matematico dove i dati sono aggiornati in base alle informazioni desunte dalla simulazione.

Dopo aver definito un modello non lineare ci siamo posti l'obiettivo di trovarne uno lineare che ne fosse una buona approssimazione. Per linearizzare il modello abbiamo definito degli indici di relazione tra archi, ossia una misura quantitativa della relazione "in serie" o "in parallelo" tra ogni coppia di archi. L'estensione della relazione di dipendenza tra due archi alla dipendenza tra più archi ci ha consentito di ottenere una stima del disagio con un errore medio molto basso: inferiore a 1%, nel valutare la chiusura di 10–15 archi.

Abbiamo inoltre individuato delle relazioni miste tra gli archi; su di esse abbiamo basato un metodo di suddivisione della rete viaria in zone distinte, corrispondenti ai diversi quartieri della città.

Il modello di P.L.I. ottenuto non è mai stato considerato nella letteratura scientifica: abbiamo quindi elaborato e valutato diversi algoritmi di tipo "greedy" per calcolarne una soluzione approssimata.

In prove eseguite su due casi reali nelle città di Trezzo S/Adda e Ponteranica, abbiamo ottenuto soluzioni il cui costo per localizzare nuovi parcheggi è stato stimato con un errore medio dello 0,5%.

Le soluzioni così ottenute inoltre distribuiscono i parcheggi in modo uniforme in tutti quartieri della città.

L'esposizione è suddivisa in cinque capitoli:

- Capitolo 1 – Definizione del modello.
- Capitolo 2 – Stima del disagio
- Capitolo 3 – Algoritmi per la suddivisione in zone.
- Capitolo 4 – Modello lineare e algoritmi di approssimazione.
- Capitolo 5 – Estensione del modello e possibili sviluppi.

1.2 Modello

Costruiamo innanzitutto un modello della città. Utilizziamo un grafo orientato $G(N,A)$ dove N è l'insieme di tutti i nodi ($N \subseteq \mathbb{N}$) e A è l'insieme di tutti gli archi ($A \subseteq N \times N$). Gli archi corrispondono alle strade (uno per ogni senso di marcia) e i nodi corrispondono alle intersezioni tra le strade: incroci e rotonde. Ogni arco a ha due valori che rappresentano il tempo medio (in secondi) necessario per percorrerlo (w_a) e il numero di parcheggi ricavabili se la circolazione in quel senso non fosse consentita (p_a).

Aggiungiamo al modello della città una matrice T del numero di utenti (traffico) per ogni coppia (o,d) .

La matrice T considera due tipi di contributi: quello dovuto alle principali arterie stradali e quello relativo ai cammini che collegano ogni nodo del grafo con quei nodi che rappresentano strutture importanti (ad esempio il comune, la scuola, l'ospedale).

Variabili

Ogni arco può essere aperto o chiuso al traffico quindi ci sono tante variabili binarie quanti sono i sensi di marcia della città (1.1). Chiamiamo $X \subseteq A$ l'insieme di tutti gli archi chiusi (1.2).

$$x_a \in \{0,1\} \quad \forall a \in A$$

(1.1)

$$X = \{a \in A \mid x_a = 1\}$$

(1.2)

Obiettivi

L'obiettivo è duplice: si vuole infatti massimizzare il numero dei parcheggi ottenuti, minimizzando il disagio. Il numero totale di parcheggi ottenuti è dato da:

$$P^x = \sum_{a \in X} p_a x_a$$

(1.3)

Per poter introdurre il secondo obiettivo dobbiamo utilizzare il concetto di cammino minimo tra due nodi. Il disagio è calcolato considerando il cammino minimo per andare da ogni possibile origine a ogni possibile destinazione. Indichiamo con SP_{od} il cammino minimo dal nodo o al nodo d . Sia W una funzione che per ogni SP_{od} restituisce il peso del cammino da o a d .

$$W(SP_{od}) = \sum_{a \in SP_{od}} w_a$$

(1.4)

Il disagio subito da (o,d) è la differenza tra il peso del cammino prima e dopo aver chiuso gli archi.

$$\delta_{od}^x = W(SP_{od}^x) - W(SP_{od})$$

(1.5)

La (1.5) rappresenta il disagio subito da un utente che parte da o per arrivare a d . Per conoscere tutto il disagio su questo cammino bisogna considerare il traffico. Consideriamo la matrice del traffico, la quale indica il numero di utenti che percorrono il cammino da o a d . Indichiamo con Δ^x il disagio provocato dalla chiusura degli archi in X :

$$\Delta^x = \sum_{o \in N} \sum_{d \in N} t_{od} \delta_{od}^x$$

(1.6)

Le due funzioni obiettivo sono quindi:

$$\begin{cases} MIN \Delta^X = \sum_{o \in N} \sum_{d \in N} t_{od} \delta_{od}^X \\ MAX P^X = \sum_{i \in X} x_i p_i \end{cases}$$

(1.7)

Vincoli

La chiusura delle strade deve inoltre rispettare la regola di non chiudere entrambi i sensi di marcia di una strada:

$$x_a + x_{\bar{a}} \leq 1 \quad \forall a, \bar{a} \in A$$

(1.8)

dove a e \bar{a} sono due archi opposti.

E' possibile aggiungere al modello altri tipi di vincoli come descritto nel capitolo 4.

Modello

Il modello completo è quindi

$$\begin{aligned} & f.o. \begin{cases} MIN \Delta^X = \sum_{o \in N} \sum_{d \in N} t_{od} \delta_{od}^X \\ MAX P^X = \sum_{a \in A} x_a p_a \end{cases} \\ & s.t. \begin{cases} x_a + x_{\bar{a}} \leq 1 & \forall a, \bar{a} \in A \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A \end{cases} \end{aligned}$$

(1.9)

Il modello (1.9) è a variabili intere a due obiettivi. I due obiettivi sono contrastanti perché per aumentare il numero di parcheggi bisogna chiudere più strade aumentando il disagio.

Il modello (1.9) è non lineare: infatti il disagio dovuto alla chiusura di più strade (Δ^X) non può essere calcolato utilizzando la sovrapposizione degli effetti. Chiamiamo Δ^a il disagio dovuto alla chiusura

del solo arco a :

$$\Delta^a = \Delta^X \quad \text{dove } X = \{a\}$$

(1.10)

In generale il disagio provocato dalla chiusura di più archi non corrisponde alla somma dei disagi calcolati chiudendo gli archi singolarmente:

$$\Delta(X) \neq \sum_{a \in X} \Delta^a$$

(1.11)

L'obiettivo del nostro lavoro è quindi di linearizzare il modello, in modo da ottenere un problema lineare intero al quale si possano applicare le tecniche di programmazione matematica.

1.3 Dipendenze tra archi

L'impossibilità di utilizzare la sovrapposizione degli effetti costringe a cercare un termine che corregga la stima del disagio Δ^X rispetto alla quantità $\sum_{a \in X} \Delta^a$. Chiamiamo U_a l'insieme dei cammini minimi che utilizzano a , e U_a^b l'insieme dei cammini minimi che utilizzano a quando si chiude l'arco b .

$$U_a = \{(o, d) \in N^2 \mid a \in SP_{od}\}$$

(1.12)

$$U_a^b = \{(o, d) \in N^2 \mid a \in SP_{od}^b\}$$

(1.13)

Definiamo indice di dipendenza di a da b :

$$r_a^b = |U_a^b| - |U_a|$$

(1.14)

Il termine r_a^b può essere sia positivo che negativo, poiché la chiusura di b può far sia aumentare che diminuire il numero di cammini minimi che utilizzano a . Chiamiamo R la matrice degli indici di dipendenza

Calcolo degli indici di dipendenza tra archi

Indichiamo con SPT_r l'albero dei cammini minimi con radice in r e con $PRED_r(i)$ e $SUCC_r(i)$ il predecessore ed i successori del nodo i in SPT_r . Definiamo inoltre con SPT_i^X l'albero dei cammini minimi, con radice in r , che non utilizza gli archi chiusi contenuti in X ; analogamente a SPT_i definiamo i cammini minimi, i predecessori ed i successori per SPT_i^X .

Il calcolo di tutti gli indici di dipendenza è realizzato col seguente algoritmo:

$$\begin{aligned}
& \forall a \in A \\
& \quad \forall b \in A \\
& \quad \quad r'_{ab} = 0 \\
& \forall \rho \in N \\
& \quad \forall v \in N \\
& \quad \quad \forall i \in N \\
& \quad \quad \quad b = PRED_{\rho}(v) \quad \quad \quad /* \text{Arco chiuso} */ \\
& \quad \quad \quad SE \ PRED_{\rho}^b(i) = PRED_{\rho}(i) \ \text{ALLORA} \\
& \quad \quad \quad \quad a = PRED_{\rho}(i) \\
& \quad \quad \quad \quad r'_{ab} = r'_{ab} + \sum_{j \in SUCC_{\rho}^{*b}(i)} t_{ij} - \sum_{j \in SUCC_{\rho}^*(i)} t_{ij} \\
& \quad \quad \quad \text{ALTRIMENTI} \\
& \quad \quad \quad \quad a = PRED_{\rho}(i) \\
& \quad \quad \quad \quad r'_{ab} = r'_{ab} - \sum_{j \in SUCC_{\rho}^{*b}(i)} t_{ij} \\
& \quad \quad \quad \quad a = PRED_{\rho}^b(i) \\
& \quad \quad \quad \quad r'_{ab} = r'_{ab} + \sum_{j \in SUCC_{\rho}^*(i)} t_{ij}
\end{aligned}$$

(1.15)

L'algoritmo (1.15) chiude, uno alla volta, gli archi di SPT_{ρ} , calcola il $SPT_{\rho}^{[v]}$ e confronta le differenze tra i predecessori. Se un predecessore rimane invariato, si controlla se sono cambiati i suoi successori. Per memorizzare gli indici di dipendenza serve una struttura dati che consenta un'accesso veloce: utilizziamo una tabella hash a due livelli (v. appendice G) dove i due archi a e b sono le chiavi. Dato che gli archi sono identificati da coppie origine–destinazione, dobbiamo trasformarli in un numero per poterli usare come chiavi.

Chiamiamo valore identificativo (ID) dell'arco (i,j) il numero:

$$ID_{ij} = i * |N| + j$$

(1.16)

I valori identificativi ID_a e ID_b sono la prima e la seconda chiave necessarie per estrarre r_a^b dalla tabella hash a due livelli.

L'algoritmo ha complessità $O(N^3)$. Sui grafi di Ponteranica e Trezzo ha impiegato rispettivamente due e tre minuti circa per calcolare gli indici di dipendenza.

Capitolo2: Stima del disagio

Il problema che dobbiamo risolvere è di calcolare il disagio provocato dalla chiusura di un insieme di archi attraverso un opportuno stimatore D . Affrontiamo il problema per gradi: consideriamo prima la chiusura di un arco, poi di due ed infine di un generico numero di archi.

2.1 Chiusura di un arco

Il disagio Δ^a causato dalla chiusura di un singolo arco a si può calcolare in modo esatto. Utilizziamo una variante dell'algoritmo dei cammini minimi di Dijkstra: l'algoritmo s-heap [2]. Calcoliamo con s-heap gli alberi di cammini minimi (*SPT*) con radice in ogni nodo e sommiamo i costi di tutti i cammini minimi. Chiudiamo l'arco a e ripetiamo l'operazione. La differenza tra le due somme è il disagio Δ^a .

I valori di disagio sono memorizzati come dati del problema e si accede a questi tramite una tabella hash (v. appendice G) che associa l'identificatore dell'arco nella posizione contenente il dato cercato (vedi capitolo 1).

2.2 Chiusura di due archi

Calcolare il disagio dovuto alla chiusura di due archi a e b è più complesso, infatti, il tempo e lo spazio che sarebbero necessari per calcolare e memorizzare i valori di disagio per ogni coppia di archi sono proibitivi e questo ci costringe a stimare il disagio invece che calcolarlo esattamente. Indichiamo la stima del disagio causato dalla chiusura di due archi a e b con:

$$D^{ab} \approx \Delta^{ab}$$

(2.1)

Per stimare il disagio procurato dalla chiusura di due archi a e b abbiamo sviluppato delle formule applicabili ai vari casi che si possono presentare nelle combinazioni dei valori degli indici di dipendenza (r_a^b e r_b^a).

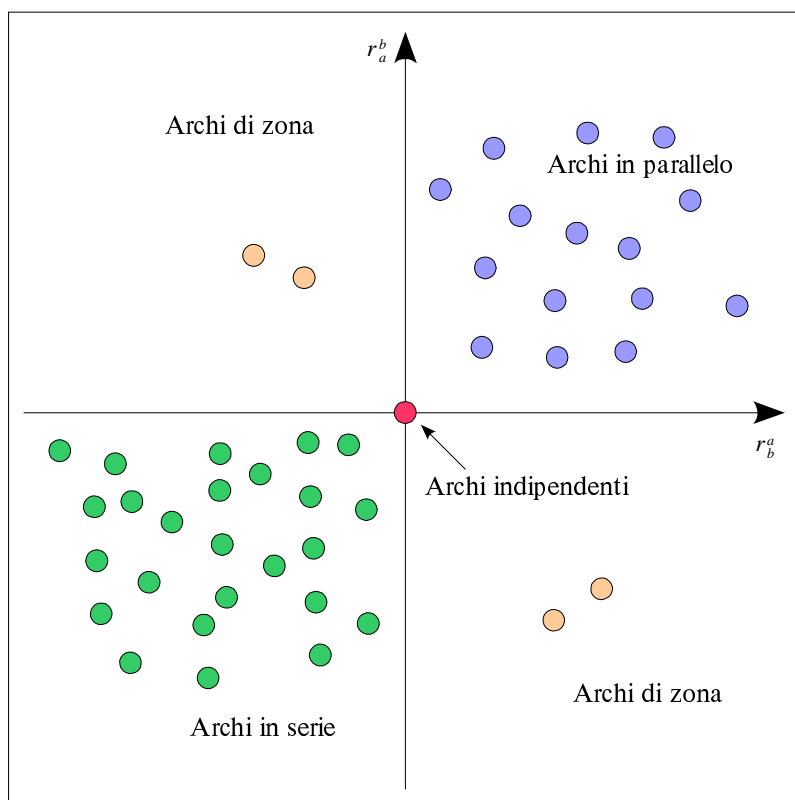


Figura 2.1: Grafo 1

La figura 2.1 rappresenta, nel piano r_a^b , r_b^a , la disposizione dei casi in cui si chiudono due archi.

Possiamo identificare quattro tipi di relazioni tra archi:

- archi in parallelo (primo quadrante)
- archi in serie (terzo quadrante)
- archi indipendenti (l'origine)
- archi di zona (secondo e quarto quadrante)

Ogni tipo di relazione richiede uno stimatore differente; il punto di partenza è però comune a tutte: l'inadeguatezza di uno stimatore basato solo sulla sovrapposizione degli effetti.

$$D_I^{ab} = \Delta^a + \Delta^b$$

(2.2)

La (2.2) calcola il disagio utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, somma cioè i disagi dovuti solo ad a e solo a b .

Adottiamo la convenzione di numerare gli stimatori con un numero romano in pedice.

Per esemplificare i vari casi ci avvaliamo di alcuni grafi che rappresentano situazioni particolari. I grafi riportano sugli archi una serie di valori il cui significato dipende dal tipo di arco, come riportato nella tabella 1.

Arco generico	<p>identificatore</p> <p>5 / 0 / 5 / 0</p> <p>N_c N_c^a N_c^b N_c^{ab}</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano quando entrambi gli archi sono chiusi</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano quando solo il secondo arco è chiuso</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano quando solo il primo arco è chiuso</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano</p>
Arco da chiudere	<p>a</p> <p>10 / 5</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano quando è chiuso l'altro arco</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano</p>
Arco alternativo	<p>identificatore</p> <p>10</p> <p>differenza tra il cammino minimo ed il cammino che utilizza quest'arco</p> <p>10 / 0 / 10 / 0</p> <p>N_c N_c^a N_c^b N_c^{ab}</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano quando entrambi gli archi sono chiusi</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano quando solo il secondo arco è chiuso</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano quando solo il primo arco è chiuso</p> <p>n° di cammini che lo utilizzano</p>

Tabella 2.1

Per facilitare la comprensione riportiamo accanto ad ogni grafo, insieme all'indice di dipendenza ed ai valori del disagio, i valori N_a ed N_b che rappresentano il numero di cammini che transitano, rispettivamente, su a e su b .

Inadeguatezza della sovrapposizione degli effetti

Dimostriamo l'inadeguatezza dello stimatore (2.2) attraverso il caso riportato in figura 2.2:

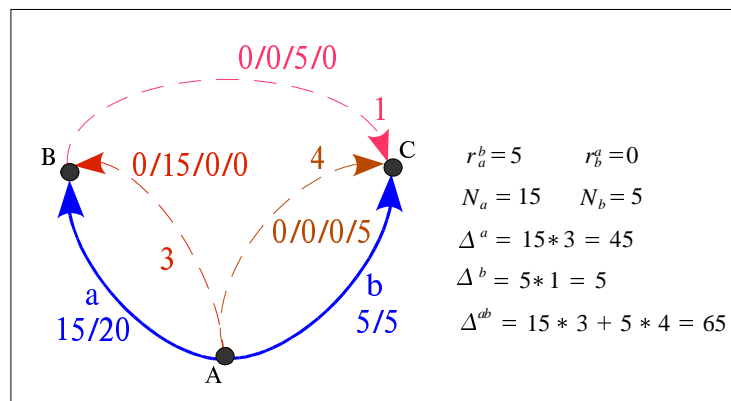


Figura 2.2

L'arco a è percorso da 15 cammini (che vanno da A a B) normalmente e da altri 5 se b è chiuso, ciascuno con un disagio pari a 1; al contrario b è utilizzato da 5 cammini (che vanno da A a C) anche se a è chiuso, nel qual caso viene utilizzato un nuovo arco alternativo con disagio pari a 3. La stima ottenuta è perciò:

$$\begin{aligned}
 D_I^{ab} &= \Delta^a + \Delta^b = \\
 &= 45 + 5 = 50
 \end{aligned}$$

(2.3)

In realtà, chiudendo entrambi gli archi, i 15 cammini che passano per a subiscono un disagio pari a Δ^a , ma i 5 cammini che passano per b non possono essere dirottati su a (che è chiuso) come calcolato dalla stima (2.3), ma devono seguire un cammino differente subendo un disagio pari a 4.

Chiamiamo *disagio ulteriore* l'incremento di disagio, dovuto alla chiusura dell'arco a , subito dai 5

cammini che partono dal nodo A per arrivare al nodo C . E' quindi necessario avere informazioni sul disagio prodotto da quegli archi che sono percorsi quando sia a che b sono chiusi.

Approssimiamo il disagio ulteriore utilizzando il termine:

$$\frac{\Delta^a}{N_a}$$

(2.4)

che rappresenta il disagio medio dovuto alla chiusura di a .

Il secondo stimatore è perciò:

$$D_{II}^{ab} = \Delta^a + \Delta^b + \underbrace{r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a}} + \underbrace{r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b}}$$

(2.5)

Dove i due termini indicati nella (2.5) rappresentano, rispettivamente il disagio ulteriore subito dai cammini di b che non possono utilizzare a ed il disagio ulteriore subito dai cammini di a che non possono utilizzare b . Chiamiamo *cammini scambiati* questi cammini che subiscono il disagio ulteriore.

Questo secondo stimatore applicato al caso di figura 2.2 risulta essere migliore:

$$\begin{aligned} D_{II}^{ab} &= \Delta^a + \Delta^b + r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a} + r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b} = \\ &= 15*3 + 5*1 + 5 * \frac{45}{15} + 0 * \frac{5}{5} = 65 = \Delta^{ab} \end{aligned}$$

Analizziamo che tipo di cammini possiamo trovare una volta fissati gli archi a e b da chiudere. La distinzione principale è tra cammini che percorrono entrambi gli archi, che chiamiamo *cammini comuni* e che indichiamo con α_{ab} , e cammini che attraversano solo a o solo b , che indichiamo con nc_a^b :

$$N_a = |cc_{ab}| + |nc_a^b|$$

(2.6)

$$N_b = |cc_{ab}| + |nc_b^a|$$

(2.7)

Quando si chiude l'arco a i cammini comuni ai due archi possono però comportarsi in due modi differenti: continuare a passare per b oppure evitarlo scegliendo una via differente. Nel primo caso si hanno cammini *fortemente comuni* (fc_b^a), mentre nel secondo cammini *debolmente comuni* (dc_b^a). I cammini che transitano sull'arco a perciò sono:

$$N_a = |nc_a^b| + |fc_a^b| + |dc_a^b|$$

(2.8)

Indichiamo il disagio relativo ai due insiemi fc_b^a e dc_b^a con:

$$FC_b^a = \sum_{(od) \in fc_b^a} W(SP_{od})$$

$$DC_b^a = \sum_{(od) \in dc_b^a} W(SP_{od})$$

(2.9)

Dal punto di vista algoritmico, il calcolo dei termini relativi ai cammini comuni (FC_b^a e DC_b^a) non aumenta la complessità: si tratta infatti di dati che otteniamo dal calcolo dei cammini minimi.

Considerando il disagio la (2.8) diviene:

$$D^a = NC_b^a + FC_b^a + DC_b^a$$

(2.10)

Così anche per b .

Il disagio subito dai cammini comuni invece può variare a seconda di quale dei due archi viene chiuso, mentre il loro numero rimane inalterato:

$$|fc_b^a| + |dc_b^a| = |fc_a^b| + |dc_a^b| \quad (2.11)$$

mentre in generale:

$$FC_b^a + DC_b^a \neq FC_a^b + DC_a^b \quad (2.12)$$

Dalle definizioni precedenti possiamo dedurre un limite inferiore al disagio provocato dalla chiusura di due archi.

Teorema 1

Dati due archi a e b il disagio dovuto alla chiusura di entrambi è:

$$\Delta^{ab} \geq NC_b^a + NC_a^b + \text{MAX}(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b)$$

Dim.

Dato che NC_b^a e NC_a^b sono i disagi dei cammini che passano solo per a e solo per b , alla chiusura di entrambi gli archi, sicuramente saranno compresi nel disagio totale.

Dobbiamo dimostrare che il disagio dei cammini comuni, quando si chiudono sia a che b , è maggiore di (o uguale a) $\text{MAX}(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b)$; ma Δ^{ab} è maggiore del disagio subito dai cammini comuni quando è chiuso solo a o solo b , cioè:

$$\Delta^{ab} \geq FC_a^b + DC_a^b \quad e \quad \Delta^{ab} \geq FC_b^a + DC_b^a$$

quindi $\Delta^{ab} \geq \text{MAX}(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b)$ ■

Cammini alternativi incompatibili

Diciamo che due cammini, appartenenti uno a fc_a^b e l'altro a fc_b^a , hanno *cammini alternativi incompatibili* tra loro quando i percorsi alternativi utilizzati per la chiusura di un solo arco non possono essere utilizzati entrambi per la chiusura di entrambi gli archi.

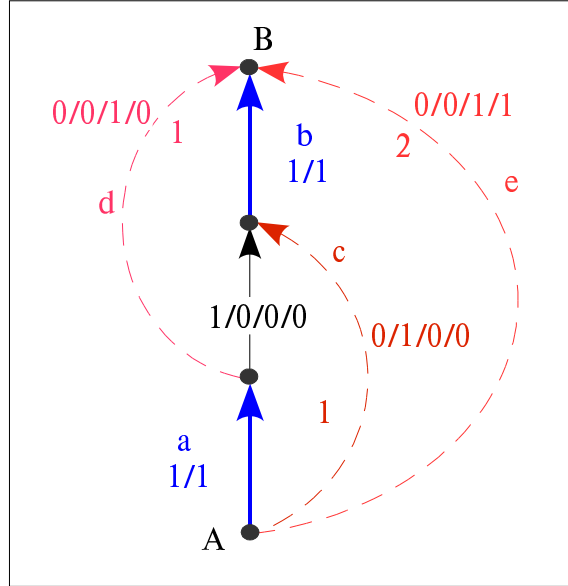


Figura 2.3

In figura 2.3 vediamo che gli archi c e d utilizzati come vie alternative a causa rispettivamente della chiusura solo di a e solo di b , non possono essere percorsi entrambi se sia a che b sono chiusi. Gli archi a e b hanno perciò cammini alternativi incompatibili.

Esaminiamo ora i 4 tipi di relazioni che possono intercorrere tra due archi: archi indipendenti, archi in serie, archi in parallelo e archi di zona.

2.2.1 Archi indipendenti

Definiamo due archi a e b indipendenti quando:

$$r_a^b = r_b^a = 0$$

(2.13)

Mediamente circa la metà delle coppie di archi sono indipendenti sui casi considerati.

Dalla definizione segue che il disagio può essere calcolato con la sovrapposizione degli effetti, sommando i disagi procurati singolarmente dagli archi:

$$D^{ab} = \Delta^a + \Delta^b$$

(2.14)

Nella grande maggioranza dei casi (sperimentalmente oltre il 99%) in cui vale la (2.13), la sovrapposizione degli effetti risulta corretta. Esistono però alcune eccezioni:

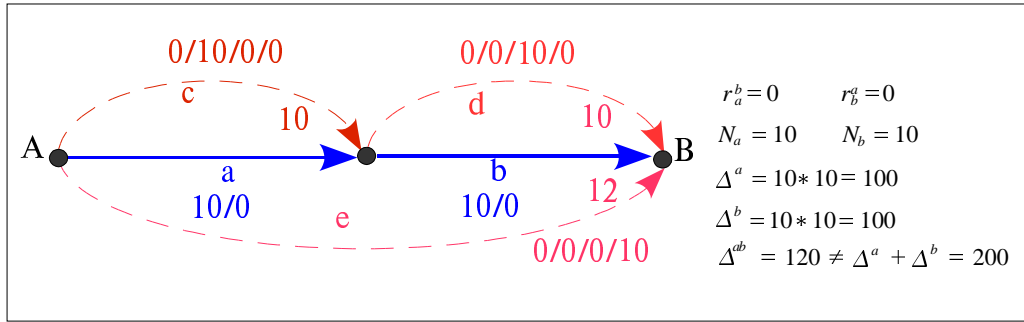


Figura 2.4

Nel grafo di figura 2.4 i due archi a e b sono chiaramente in serie ma dai valori degli indici di dipendenza non si rileva perchè i cammini che li attraversano sono fortemente comuni. Infatti alla chiusura di a i cammini che vanno da A a B passano per c continuando così ad utilizzare b ; analogamente, alla chiusura b , questi dieci cammini transitano per d utilizzando ancora a . Il disagio reale che dipende dalla lunghezza del cammino alternativo non corrisponde alla sovrapposizione degli effetti. Abbiamo però la possibilità di identificare questi casi: sappiamo infatti che i termini $FC_b^a + DC_b^a$ e $FC_a^b + DC_a^b$, rappresentano il disagio subito dai cammini comuni nel caso, rispettivamente, che sia chiuso solo a o solo b . Se questi termini sono nulli significa che o non ci sono cammini comuni, oppure che il loro disagio è nullo.

La verifica di questa ulteriore condizione ci permette di riconoscere gli archi a e b di figura 2.4 come archi in serie.

La definizione (2.13) può quindi essere modificata come segue:

$$(r_a^b = r_b^a = 0) \wedge (FC_b^a + DC_b^a = FC_a^b + DC_a^b = 0) \quad (2.15)$$

Una scelta alternativa consiste nel lasciare invariata la definizione di archi indipendenti e di utilizzare una condizione parametrica, che limita l'influenza dei cammini comuni sul disagio:

$$\text{MAX} \left(\frac{FC_a^b + DC_a^b}{\Delta^b}, \frac{FC_b^a + DC_b^a}{\Delta^a} \right) \leq \eta$$

Se Δ_a e Δ_b sono entrambi uguali a zero allora la chiusura degli archi non provoca disagio; ma se uno dei due è zero valutiamo:

$$\frac{FC_b^a + DC_b^a}{\Delta^a} \leq \eta$$

Dal punto di vista sperimentale però una condizione di questo tipo non porta nessun vantaggio, infatti il numero di coppie di archi interessato è molto limitato.

Osservazione:

La (2.15), benchè più restrittiva della (2.13) non è tuttavia sufficiente a garantire che valga la sovrapposizione degli effetti (fig. 2.5):

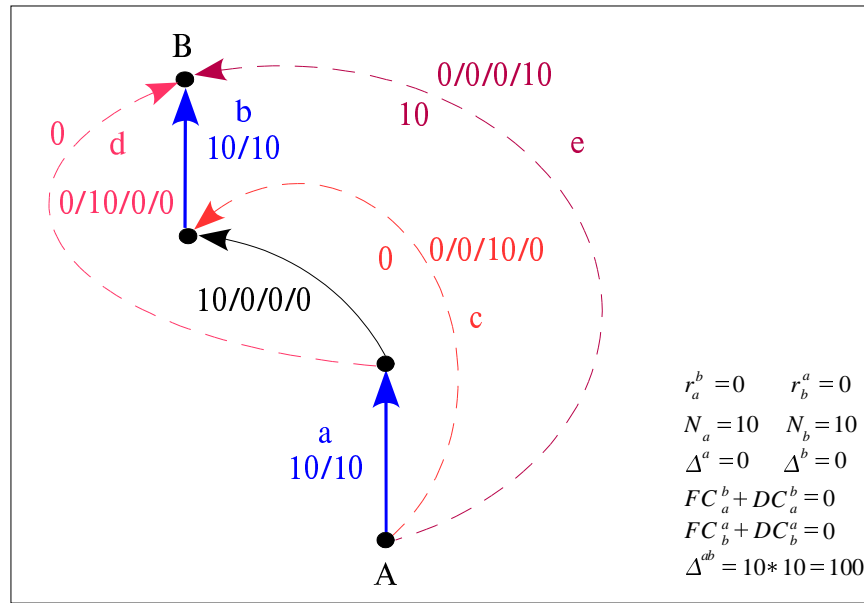


Figura 2.5

In figura 2.5 per esempio gli archi alternativi (c e d) percorsi dai cammini fortemente comuni, che vanno da A a B, sono incompatibili; questa è la causa della non validità della sovrapposizione degli effetti.

Nelle prove da noi effettuate non abbiamo mai rilevato situazioni come quella presentata nell'osservazione precedente (figura 2.5); devono infatti verificarsi sia la condizione di cammini fortemente comuni incompatibili, sia che gli stessi cammini siano a disagio zero.

Osservazione:

E' interessante notare che la (2.15) non è neppure necessaria: ci sono casi in cui, pur non essendo valida la condizione (2.15) di indipendenza, la sovrapposizione degli effetti è comunque applicabile. La figura 2.6 riporta un esempio con archi in serie.

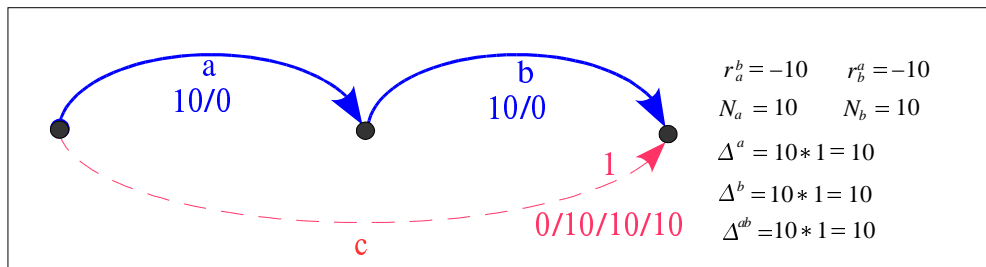


Figura 2.6

Osservazione:

La condizione (2.15) può però diventare condizione necessaria e sufficiente per la (2.14): dobbiamo considerare solo archi che una volta chiusi provocano un disagio non nullo.

2.2.2 Archi in parallelo

Diciamo che due archi sono in parallelo quando:

$$(r_a^b * r_b^a \geq 0) \wedge (r_a^b + r_b^a > 0)$$

(2.16)

Le coppie in parallelo sono circa il 20–25% delle coppie totali del grafo, si tratta dell'insieme più numeroso dopo quello degli archi indipendenti.

Il disagio provocato dalla chiusura di archi in parallelo non è superiormente limitabile: infatti può essere anche molto superiore alla somma dei disagi calcolati chiudendo singolarmente i due archi.

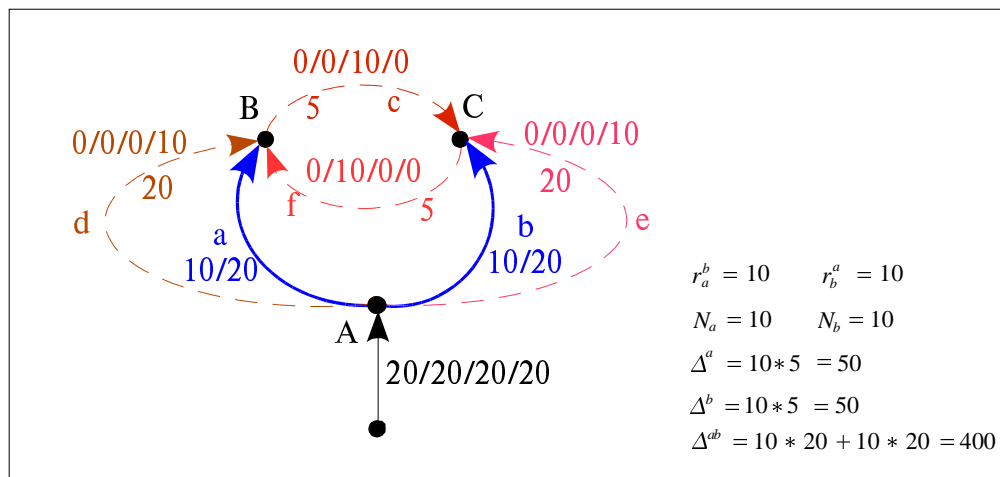


Figura 2.7

Nel caso di figura 2.7 quando solo a è chiuso i cammini, che vanno da A a B, passano per b e f . Analogamente, alla chiusura di b , i cammini che vanno da A a C passano per a e c . Quando si chiudono entrambi a e b , i cammini da A a B e da A a C percorrono rispettivamente i due cammini alternativi d e e subendo ciascuno un disagio pari a 20. In questo caso:

$$\Delta^{ab} > \Delta^a + \Delta^b$$

Oltre a non conoscere un limite superiore del disagio, in generale non siamo neanche in grado di approssimarlo. Il disagio causato dalla chiusura di a e b nel caso di figura 2.7 non è infatti stimabile in modo preciso con lo stimatore D_{II} :

$$D_{II}^{ab} = \Delta^a + \Delta^b + r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a} + r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b}$$

$$50 + 50 + 10 * \frac{50}{10} + 10 * \frac{50}{10} = 200$$

Il disagio stimato così è infatti solo metà del disagio reale.

Non in tutti i casi di parallelismo lo stimatore D_{II} offre pessimi risultati, ci sono infatti casi in cui la stima è buona. Cerchiamo quindi di distinguere i casi in cui la stima non è accettabile, in modo da costruire una condizione che escluda i casi sfavorevoli.

Nel caso 7 i cammini che passano per l'arco a si spostano su b dopo la chiusura di a ; in modo analogo i cammini passanti per b si trasferiscono su a dopo la chiusura di b . Questo comportamento non ci permette di ottenere alcuna informazione riguardo ai percorsi che i cammini di entrambi gli archi seguono quando sia a che b sono chiusi. Se però si ipotizza che i cammini che passano dall'arco a all'arco b (e viceversa) siano pochi, rispetto al totale di quelli che attraversano i due archi, si può supporre che l'errore commesso nella stima sia minore.

Nel caso in cui sia N_a che N_b sono diversi da zero richiediamo che valga:

$$\text{MAX}\left(\frac{r_b^a}{N_a}, \frac{r_a^b}{N_b}\right) \leq \beta$$

(2.17)

dove il valore del parametro β si può fissare tra 0 e 1.

La 2.17 è la condizione utilizzata per la scelta dei casi in parallelo da considerare: se entrambi gli archi non sono normalmente utilizzati ($N_i=0$) sappiamo che il disagio provocato è nullo e quindi la stima è esatta; se ciò non avviene si verifica quanto è rilevante la quantità di cammini scambiati rispetto al totale: tanto è maggiore questo rapporto tanto più aumenta la probabilità di commettere nella stima un grande errore. Se N_a e N_b sono entrambi uguali a zero allora siamo sicuri di poter chiudere gli archi senza provocare disagio; ma se solo uno dei due è zero ($N_a=0$) si controlla che:

$$\frac{r_a^b}{N_b} \leq \beta$$

(2.18)

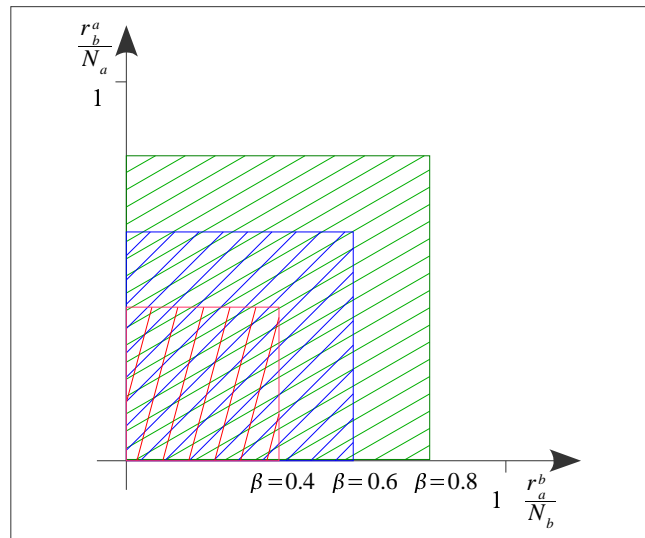
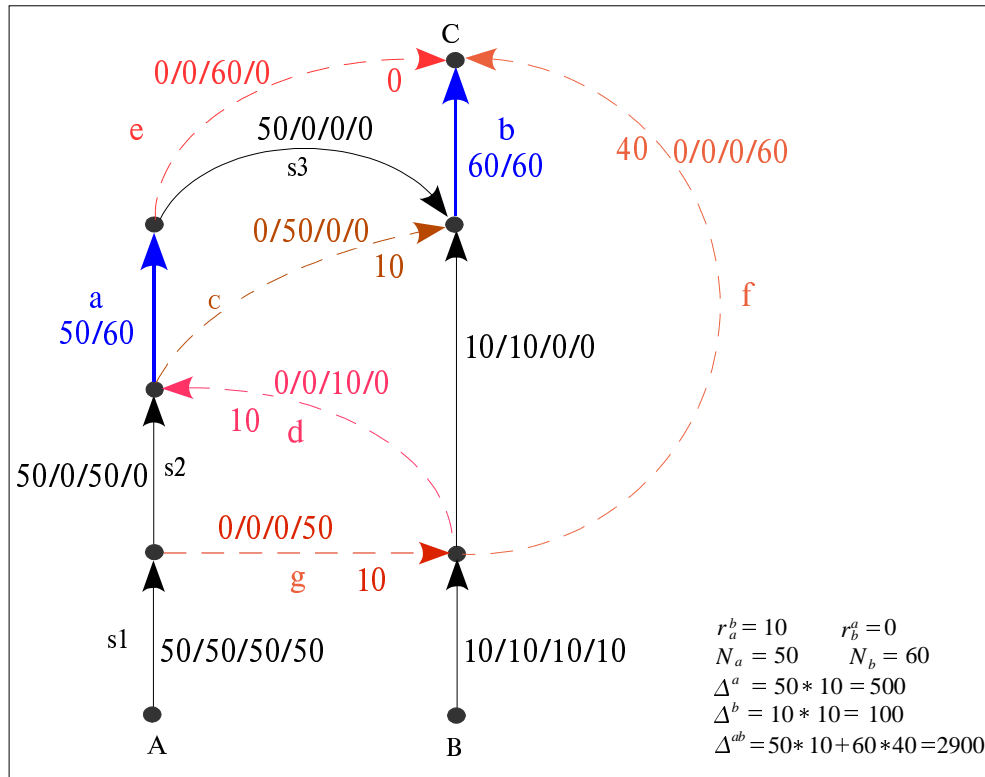


Figura 2.8: Grafico 2

La figura mostra come il valore di β influenzi la regione dei casi ammissibili.

Questa condizione però non garantisce di eliminare tutti i casi in cui la stima può essere molto imprecisa: non sono infatti considerati i casi che presentano disagio per i cammini comuni. Anche se può apparire strano, due archi in parallelo possono avere cammini comuni: questo è dovuto alla presenza di alcuni cammini che attraversano entrambi gli archi, cioè li vedono in serie. Nel calcolo degli indici di dipendenza però sono in maggior numero i cammini scambiati e perciò i due archi vengono classificati in parallelo. Mediamente quasi il 90% delle coppie di archi in parallelo ha dei cammini comuni: chiamiamo *parallelo puro* la relazione esistente nel restante 10% dei casi, in cui non esistono cammini comuni.



Formula 2.9

Il grafo di figura 2.9 contiene due archi a e b tra loro paralleli, infatti, alla chiusura di b , i dieci cammini che vanno da B a C si spostano su d , a , e . I cammini di a però percorrono anche b , dato che transitano per $s1$, $s2$, a , $s3$, b , sono quindi dei cammini comuni. La condizione 2.17 applicata all'esempio di figura 2.9 diventa:

$$MAX\left(\frac{10}{60}, \frac{0}{50}\right) \leq \beta$$

Il parametro β dovrebbe valere meno di 0,16 (valore abbastanza basso, v. appendice D) per poter scartare il caso di figura 11, ma anche per valori più piccoli ci possono comunque essere casi che non sono scartati (è sufficiente incrementare il numero di cammini comuni). Per riconoscere casi come questo è necessario verificare l'importanza che hanno i cammini comuni. Nel caso in cui sia Δ^a che Δ^b sono diversi da zero, analogamente alla (2.18), imponiamo la condizione (2.19):

$$MAX\left(\frac{FC_b^a + DC_b^a}{\Delta^a}, \frac{FC_a^b + DC_a^b}{\Delta^b}\right) \leq \gamma_p$$

(2.19)

dove il valore del parametro γ_p si può fissare tra 0 e 1.

Se Δ^a e Δ^b sono entrambi uguali a zero allora la chiusura degli archi non provoca disagio; ma se uno dei due è zero ($\Delta^b=0$) valutiamo:

$$\frac{FC_b^a + DC_b^a}{\Delta^a} \leq \gamma_p$$

(2.20)

L'impiego di due condizioni è necessario perchè ognuna esclude un tipo di situazione sfavorevole: la condizione 2.17 esclude i casi di parallelo puro, mentre la condizione 2.19 scarta le coppie di archi in parallelo in base al loro grado di serialità, dato dal valore di disagio dei cammini comuni. Il grafico di figura 2.10 mostra come può variare l'errore medio commesso dallo stimatore D_{II} al variare dei

parametri β e γ_p (e quindi delle coppie considerate).

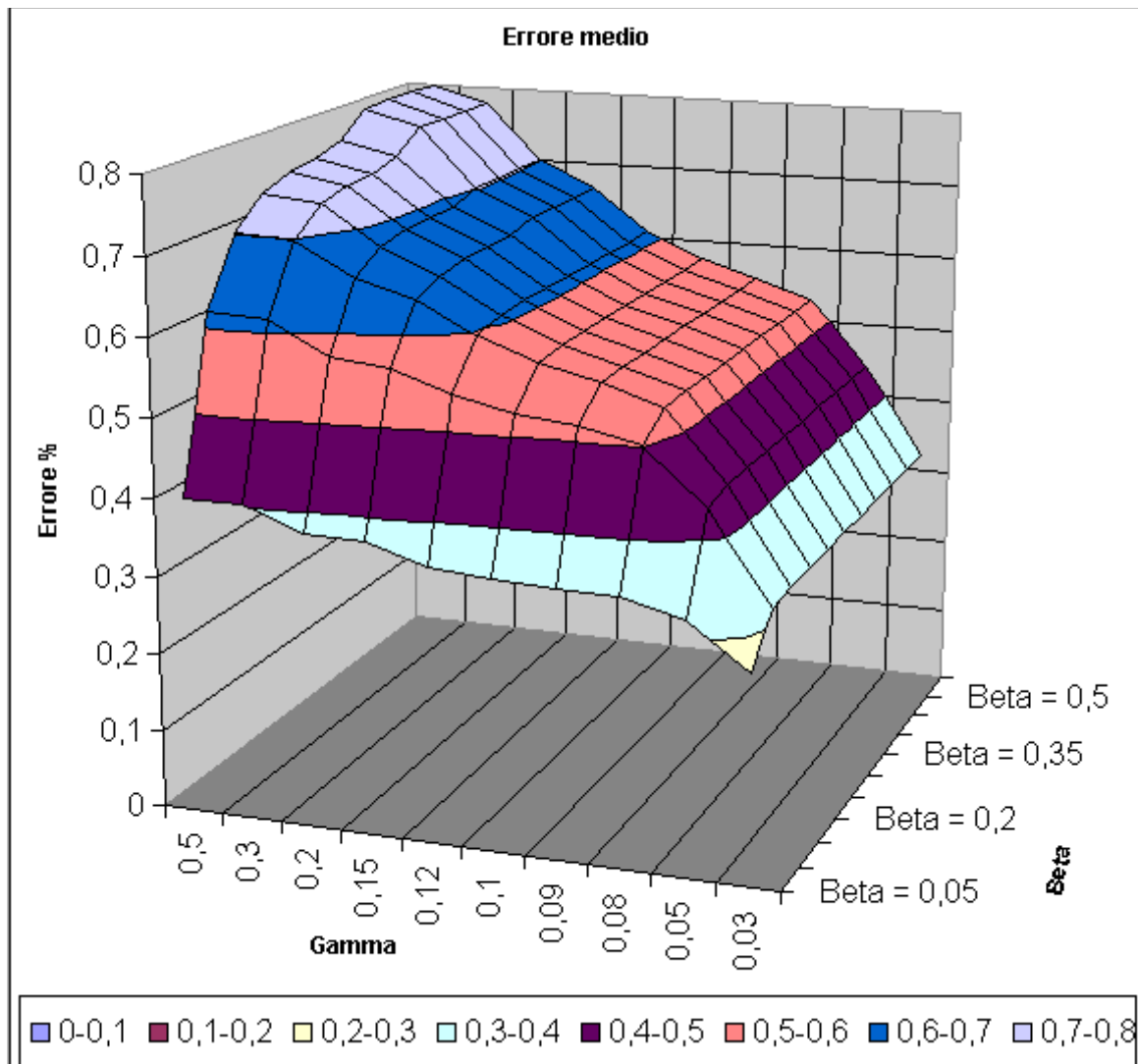


Figura 2.10: Grafico 3

Oltre all'errore ha molta importanza il numero dei casi che si considerano. Il grafico 2.11 rappresenta il numero di coppie di archi scartate dalle due condizioni su un totale di 5392 casi.

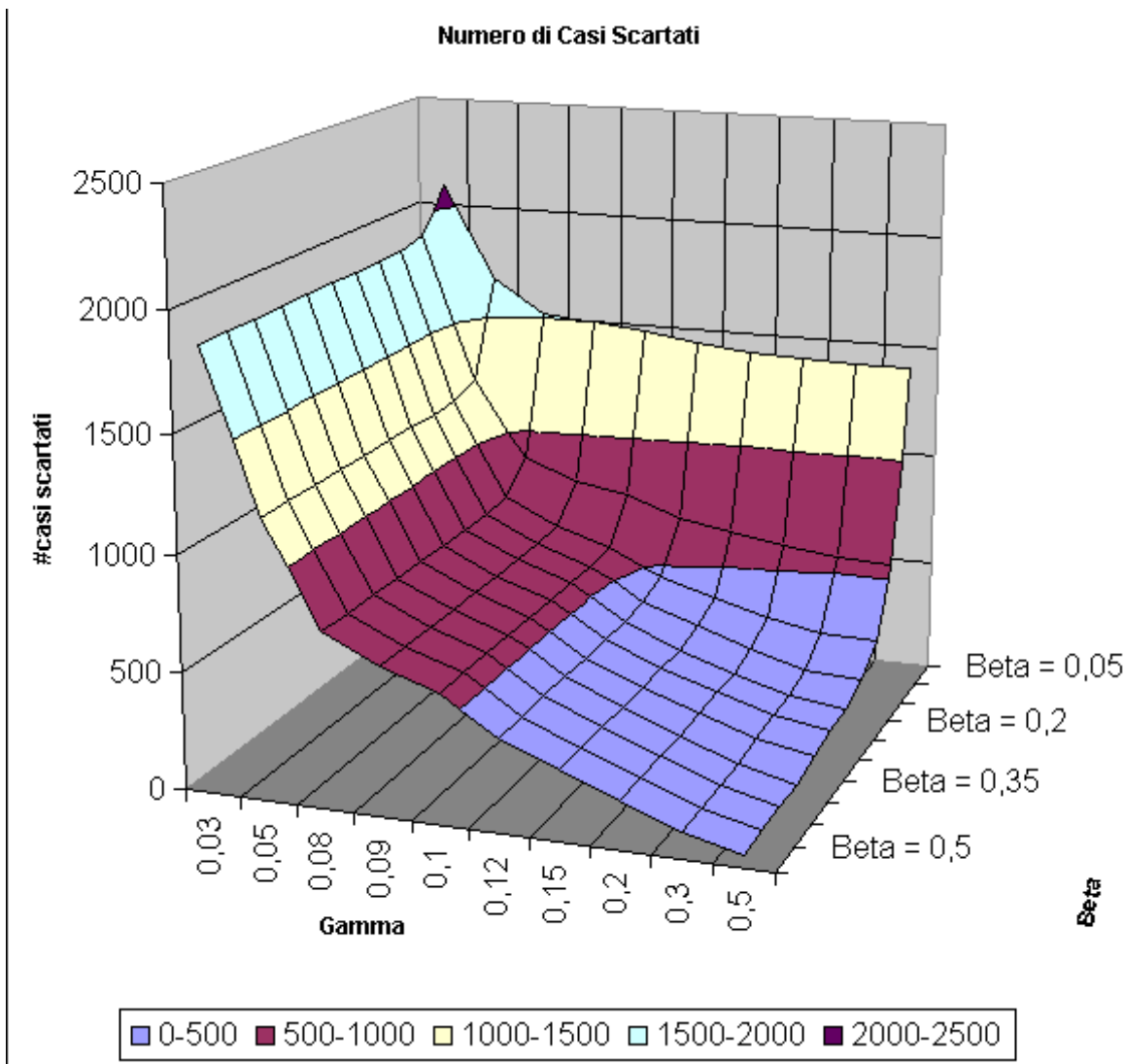


Figura 2.11: Grafico 4

I grafici sono relativi ai dati del comune di Trezzo (v. appendice C).

2.2.3 Archi in serie

Definiamo due archi a , b in serie quando:

$$(r_a^b + r_b^a < 0) \wedge (r_a^b * r_b^a > 0)$$

(2.21)

la formula 2.21 rappresenta una condizione sufficiente per la presenza di cammini che utilizzano sia a che b : *i cammini comuni*.

Il valore assoluto di relazione (r_a^b) negativo è il numero di cammini che non passano più per a a causa della chiusura di b . Anche i termini dello stimatore , cambiano significato:

$$D_{II}^{ab} = \Delta^a + \Delta^b + \underbrace{r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a}} + \underbrace{r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b}}$$

(2.22)

Dove i due termini indicati nella (2.22) rappresentano, rispettivamente: il disagio ulteriore subito dai cammini di b che non passano più per a ed il disagio ulteriore subito dai cammini di a che non possono utilizzare b .

Procederemo per miglioramenti successivi, illustrando controesempi e relative soluzioni.

Controesempio

Consideriamo un semplice caso di archi in serie come quello di figura 2.12.

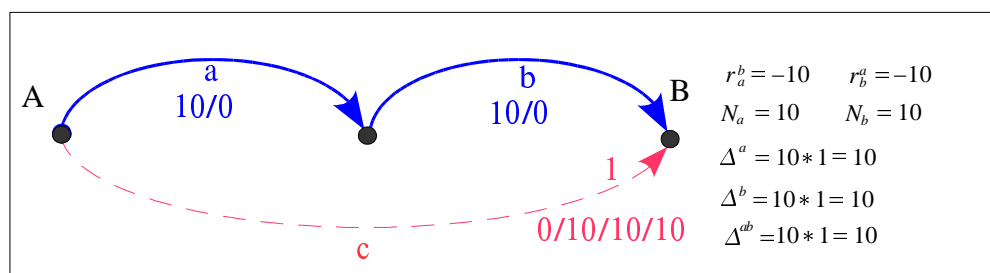


Figura 2.12

Nel caso di figura (2.12) i 10 cammini comuni, che vanno da A a B , utilizzano l'arco c quando si chiude a o b . Δ^a e Δ^b contengono entrambi il disagio dei cammini comuni, perciò i termini correttivi lo rimuovono. La stima è:

$$\begin{aligned}
D_{II}^{ab} &= \Delta^a + \Delta^b + r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a} + r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b} = \\
&= 10*1 + 10*1 - 10 * \frac{10}{10} - 10 * \frac{10}{10} = 0 < \Delta^{ab}
\end{aligned}$$

La stima è sbagliata per difetto perchè i due termini correttivi compensano due volte il disagio degli stessi cammini comuni. Il disagio stimato è addirittura inferiore al disagio dovuto alla chiusura di un singolo arco, il che rappresenta una situazione impossibile perché il disagio non può diminuire all'aumentare del numero di archi chiusi.

Stima III

Lo stimatore di formula (2.23) si comporta meglio in quanto attua una sola correzione alla somma dei disagi. Il termine correttivo evita che venga calcolato due volte disagio dovuto ai cammini debolmente comuni di a e b .

Consideriamo quindi:

$$D_{III}^{ab} = \Delta^a + \Delta^b + \text{MAX} \left(r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a}, r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b} \right)$$

(2.23)

In questo modo il caso di figura 2.12 è stimato in modo corretto:

$$\begin{aligned}
D_{III}^{ab} &= \Delta^a + \Delta^b + \text{MAX} \left(r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a}, r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b} \right) = \\
&= 10*1 + 10*1 + \text{MAX} \left(-10 * \frac{10}{10}, -10 * \frac{10}{10} \right) = 10 = \Delta^{ab}
\end{aligned}$$

(2.24)

Controesempio

Analizziamo ora un caso più complesso (figura 2.13)

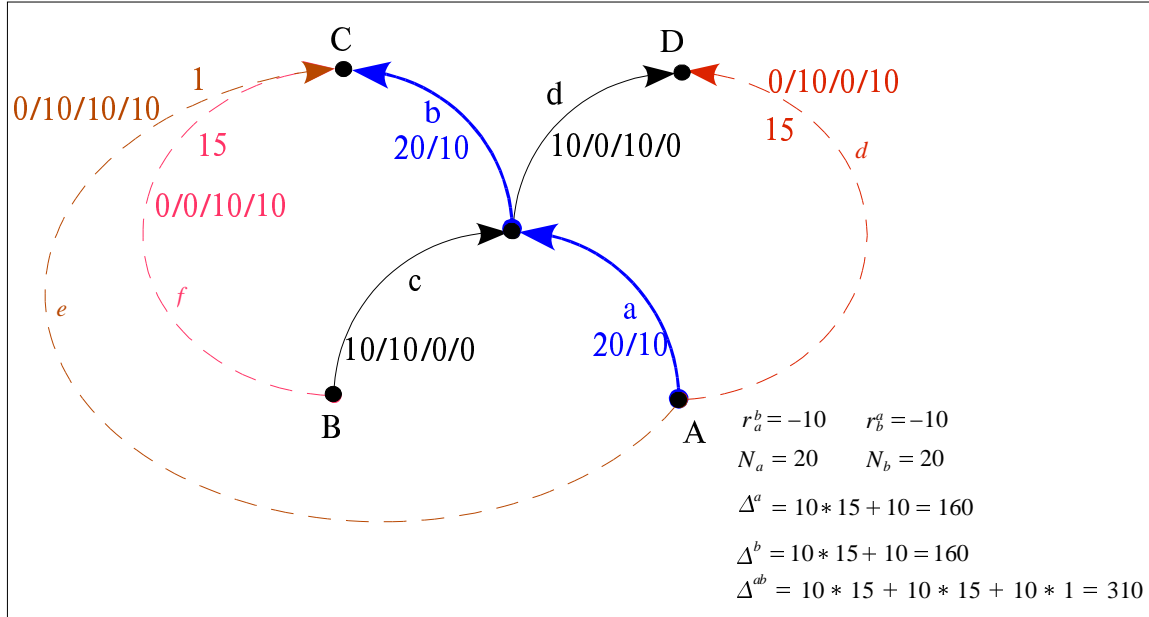


Figura 2.13

In figura (2.13) ci sono dieci cammini che partono da A e arrivano a C passando per a e per b ; altri dieci cammini partono dal nodo A e arrivano al nodo D transitando su a e su d ; infine dieci cammini vanno da B a C passando per c e b .La chiusura dell'arco a costringe i cammini che vanno da A a D e da A a C a transitare, rispettivamente, per gli archi d e e . La stima calcolata da

D_{III} , nel caso di figura(2.13) è:

$$\begin{aligned}
 D_{III}^{ab} &= \Delta^a + \Delta^b + \text{MAX} \left(r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a} , r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b} \right) = \\
 &= 160 + 160 + \text{MAX} \left(-80 , -80 \right) = 240 < \Delta^{ab}
 \end{aligned}$$

(2.25)

I valori di disagio dovuti ai cammini alternativi d ed e sono molto diversi tra loro (1 e 15), perciò il disagio medio dovuto alla chiusura dell'arco a non è una buona stima del disagio subito dai

cammini comuni, perchè nel valore medio è considerato anche il disagio dei cammini non comuni.

Stima IV

Utilizzando la (2.8) possiamo scrivere i cammini che passano per a e per b come:

$$N_{ab} = |nc_b^a| + |nc_a^b| + |cc_{ab}| \quad (2.26)$$

Analogamente il disagio può essere espresso in modo analogo come:

$$D_{ab} = NC_b^a + NC_a^b + CC^{ab} \quad (2.27)$$

dove il termine CC^{ab} è il disagio subito dai cammini comuni (cc_{ab}).

Per avere una valida stima del disagio procurato dalla chiusura di a e di b , dobbiamo stimare correttamente il termine CC^{ab} .

Grazie al teorema 1 conosciamo una sottostima del disagio dei cammini comuni, data dalla somma dei termini FC_b^a e DC_b^a relativi ad uno solo dei due archi. Usiamo perciò questa approssimazione per la stima del disagio:

$$D_{IV}^{ab} = NC_b^a + NC_a^b + MAX(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b) \quad (2.28)$$

La (2.28), per il grafo di figura (2.13) calcola il disagio correttamente:

$$\begin{aligned} D_{IV}^{ab} &= NC_b^a + NC_a^b + MAX(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b) = \\ &= 15*15 + 10*15 + MAX(10*1, 10*1) = 310 = \Delta^{ab} \end{aligned}$$

Osservazione:

La distinzione in cammini debolmente e fortemente comuni suggerirebbe di stimare separatamente il disagio subito da questi cammini.

$$D^{ab} = NC_b^a + NC_a^b + \underbrace{\text{MAX} (DC_b^a, DC_a^b)}_{\text{disagio dei cammini debolmente comuni}} + \underbrace{\text{MAX} (FC_b^a, FC_a^b)}_{\text{disagio dei cammini fortemente comuni}} \quad (2.29)$$

La (2.29) osserva la suddivisione citata. Perchè la (2.29) sia valida è necessario che i cammini debolmente (fortemente) comuni per un arco siano tali anche per l'altro.

Tale condizione è però restrittiva:, infatti il passaggio dei cammini da debolmente a fortemente comuni (e viceversa) è abbastanza frequente. Un caso come quello di figura 2.14 riporta una situazione di questo tipo.

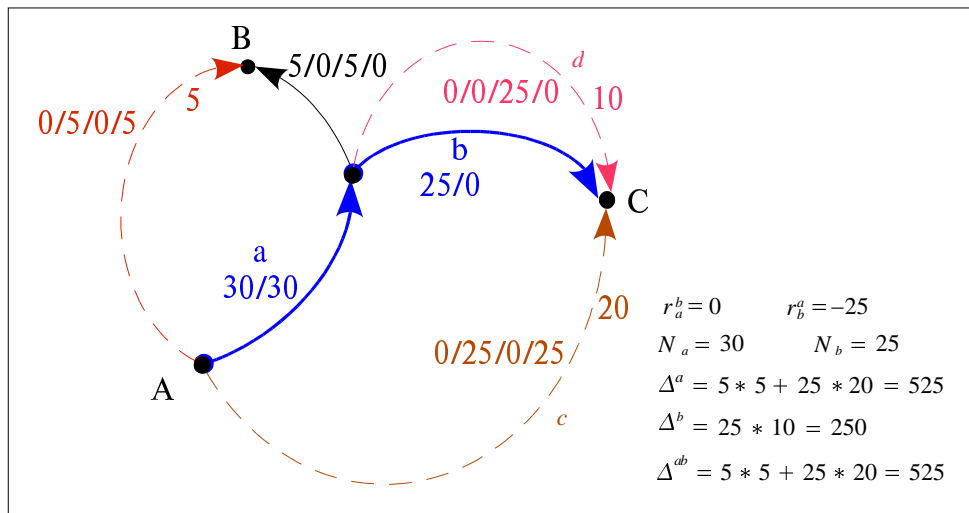


Figura 2.14

La formula (2.31) stima il disagio, del grafo di figura (2.14), nel seguente modo:

$$\begin{aligned} D^{ab} &= NC_b^a + NC_a^b + MAX(DC_b^a, DC_a^b) + MAX(FC_b^a, FC_a^b) = \\ &= 5*5 + 0 + MAX(25*20, 0) + MAX(0, 25*10) = \\ &775 > \Delta^{ab}=525 \end{aligned}$$

la sovrastima deriva proprio dall'aver considerato i cammini debolmente e fortemente comuni come indipendenti tra loro. Ci sono infatti i 25 cammini, che partono da A per arrivare a C, che sono fortemente comuni per b (alla sua chiusura viene usato l'arco d), ma sono debolmente comuni per a (alla sua chiusura viene utilizzato l'arco c). Questo ci porta a considerare due volte questi cammini nella stima. Riunendo il disagio dei cammini fortemente e debolmente comuni si evita di considerare due volte i cammini:

$$\begin{aligned} D_{IV}^{ab} &= NC_b^a + NC_a^b + MAX(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b) = \\ &= 5*5 + 0 + MAX(25*20, 25*10) = 525 = \Delta^{ab} \end{aligned}$$

lo stimatore IV infatti stima il disagio in modo corretto.

Il teorema 1 però non garantisce nulla riguardo alla qualità della stima. A questo proposito analizziamo il caso di figura 2.15:

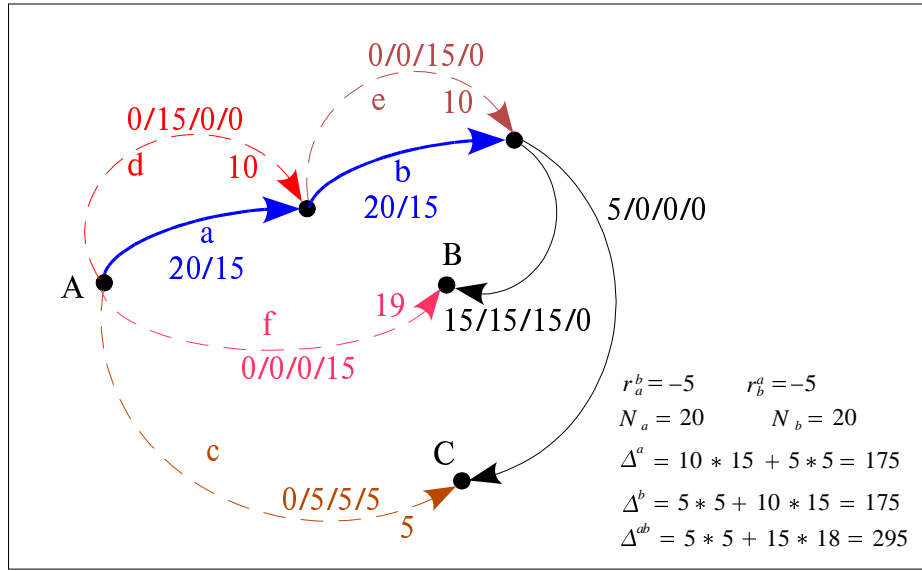


Figura 2.15

Lo stimatore IV applicato al caso di figura 2.15 dà come risultato:

$$D_{IV}^{ab} = \begin{matrix} NC_b^a & + & NC_a^b & + & MAX(& FC_b^a + DC_b^a, & FC_a^b + DC_a^b) & = \\ 0 & + & 0 & + & MAX(5*5 + 15*10, & 15*10 &) & = 175 < \Delta^{ab} \end{matrix}$$

la sottostima ottenuta è molto lontana dal valore reale; l'aver considerato solo un arco ha limitato molto la stima del disagio (ricordiamo che $FC_b^a + DC_b^a$ si riferisce alla chiusura di un solo arco). I cammini comuni vanno dal nodo A al nodo B (15) e dal nodo A al nodo C (5). I cammini che vanno da A a B sono fortemente comuni sia per a che per b e seguono l'arco d se solo a è chiuso, mentre seguono e se solo b è chiuso, ma nel momento in cui sia a che b sono chiusi, seguono un percorso alternativo percorrendo l'arco c . Il disagio dovuto a quest'arco è impossibile da conoscere valutando solo le relazioni tra due archi. Dal teorema 1 sappiamo però che:

$$MAX(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b) \leq CC^{ab}$$

(2.30)

Questo significa che l'arco alternativo c è sicuramente più disagiata (al limite uguale) del più lungo

tra gli archi d e e (se così non fosse sarebbe utilizzato immediatamente dopo la chiusura di a o di b). Ci serve però anche un limite superiore a Δ^{ab} . Utilizziamo per questo scopo

$FC_b^a + DC_b^a + FC_a^b + DC_a^b$, cioè supponiamo che il disagio subito per percorrere ogni arco alternativo c sia minore (o uguale) a quello che si ha percorrendo sia d che e . Questa ipotesi non è sempre verificata, ma lo è molto spesso; presentiamo un controesempio nel seguito.

Estendiamo lo stimatore IV con un ulteriore termine che stimi il disagio portato dall'eventuale nuovo arco alternativo, preso dopo la chiusura di a e b .

$$D^{ab} = NC_b^a + NC_a^b + MAX(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b) + \underbrace{\alpha MIN(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b)}$$

(2.31)

Dove α è un parametro da stabilire tra 0 e 1. Inoltre il termine indicato nella (2.31) rappresenta la stima del disagio portato sui cammini comuni con la chiusura del secondo arco. Chiamiamo l'intervallo definito da questo termine *intervallo di stima*.

La (2.31) rappresenta un'estensione dello stimatore IV nella quale il termine aggiuntivo è controllato da un parametro α . Nel caso di figura 2.15 il parametro α rappresenta in quale posizione si trova il corretto disagio aggiuntivo nell'intervallo:

$$\begin{aligned} & [175; 325] \\ & [MAX(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b); (FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b)] \end{aligned}$$

Le prove sperimentali effettuate (v. appendice B) mostrano come $\alpha=0.5$ sia il valore più adatto per limitare il massimo errore di stima. Completiamo quindi la (2.31) per ottenere lo stimatore V :

$$D_V^{ab} = NC_b^a + NC_a^b + MAX(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b) + 0.5 MIN(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b)$$

(2.32)

la stima ottenuta nel caso di figura 2.15 è:

$$\begin{aligned}
D_V^{ab} &= NC_b^a + NC_a^b + MAX(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b) + 0.5 MIN(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b) = \\
&= 0 + 0 + MAX(5*5 + 15*10, 15*10) + 0.5 MIN(5*5 + 15*10, 15*10) = \\
&= 262.5 < \Delta^{ab}
\end{aligned}$$

Il valore ottenuto non corrisponde al disagio vero, dato che c'è un errore di circa il 10%, tuttavia il caso di figura 2.7 è particolarmente sfortunato (ma abbastanza raro, cfr. appendice E). In esso, per avere una stima corretta α dovrebbe essere circa uguale a uno. In generale non siamo in grado di stabilire, caso per caso, il valore di α che fornisce la stima esatta; perciò se l'intervallo è ampio, l'errore che si può commettere è anch'esso ampio e potrebbe rivelarsi inaccettabile. Il problema è anche più esteso: esistono dei casi limite in cui il disagio reale non è contenuto nell'intervallo di stima.

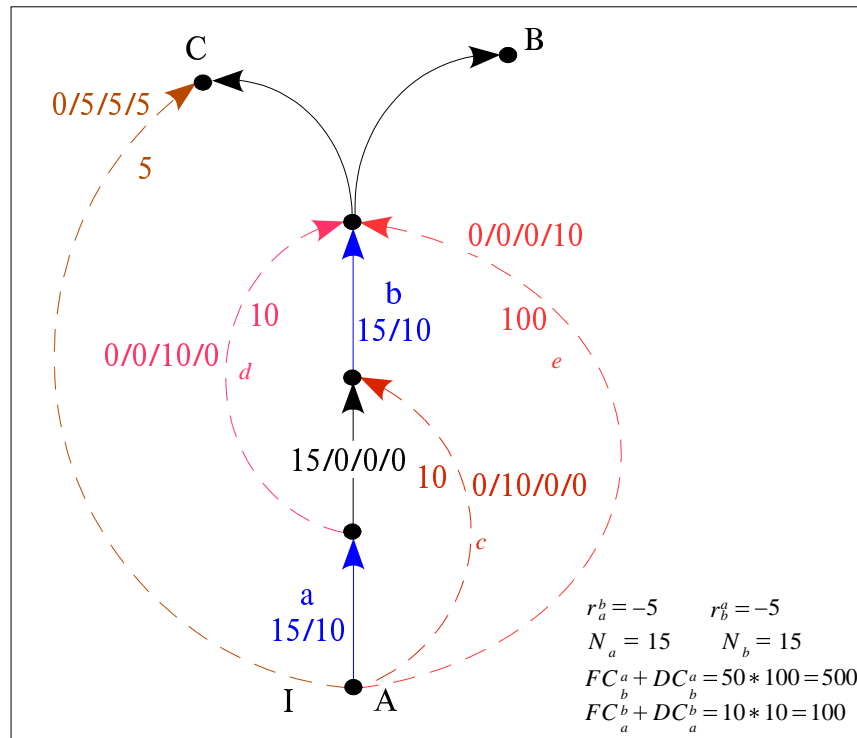


Figura 2.16

Nel caso di figura 2.16, quando entrambi gli archi sono chiusi, il disagio subito da ogni cammino che ha origine in A e giunge in B non è compreso nell'intervallo:

$$[125;250]$$

$$[MAX(FC_b^a+DC_b^a, FC_a^b+DC_a^b); (FC_b^a+DC_b^a, FC_a^b+DC_a^b)]$$

Ciò è dovuto all'impossibilità di utilizzare insieme gli archi c e d , il che costringe i cammini ad utilizzare l'arco e , il che costringe i cammini ad utilizzare l'arco e che causa un disagio maggiore della somma dei disagi da c e d . Tutti quei casi che presentano *cammini alternativi incompatibili* (non possono cioè essere percorsi entrambi) hanno un disagio non limitabile superiormente.

Anche se non siamo in grado di ottenere una stima accettabile per questi casi, siamo però in grado di stabilire quanto rischiamo di imbatterci in essi.

Nel caso in cui sia Δ^a che Δ^b sono diversi da zero imponiamo la condizione (2.36a).

$$MAX\left(\frac{FC_b^a+DC_b^a}{\Delta^a}, \frac{FC_a^b+DC_a^b}{\Delta^b}\right) \leq \gamma_s$$

(2.33a)

dove γ_s è un parametro da stabilire che sta tra 0 e 1.

Se Δ^a e Δ^b sono entrambi uguali a zero allora la chiusura degli archi non dovrebbe provocare disagio. Ma se anche uno solo dei due è diverso da zero ($\Delta^b=0$) allora valutiamo:

$$\frac{FC_b^a+DC_b^a}{\Delta^a} \leq \gamma_s$$

(2.33b)

La 2.33 è una condizione che consente di selezionare i casi in base alla quantità di disagio portata dai cammini comuni. Fissata una soglia di rischio (γ_s), vogliamo considerare solo quei casi in cui il disagio dei cammini comuni, rapportato al disagio totale, non supera la soglia. Con questa condizione si diminuisce la possibilità di considerare i casi con cammini alternativi incompatibili e i casi simili a quello di figura 2.16, che causano errori di stima elevati.

Il valore da attribuire a γ_s dipende dal grado di rischio che si è disposti ad accettare. I risultati, al

variare del parametro, dipendono dal grafo analizzato; non è perciò possibile stabilire un andamento tipico della bontà della stima, né tantomeno un valore di γ_s sempre adatto, ma è necessario valutare singolarmente ogni grafo (cfr. Appendice D). L'unica certezza che possiamo trarre dalla condizione 2.33 è che, al diminuire di γ_s , diminuisce la probabilità di commettere errori elevati, perciò diminuisce l'errore medio. Alla condizione 2.33 dobbiamo sottrarre tutti quei casi in cui la stima corretta del disagio si ottiene con $\alpha=0$. Questo si può farlo grazie al teorema seguente:

Teorema 2

Siano a e b due archi in serie: condizione necessaria e sufficiente affinché

$$(\Delta^{ab} = NC_b^a + NC_a^b + DC_b^a) \wedge (DC_b^a > 0)$$

è che

$$(FC_b^a + DC_b^a > FC_a^b + DC_a^b) \wedge (FC_b^a = 0)$$

Dim.

Dimostriamo prima la parte necessaria. Se $\Delta^{ab} = NC_b^a + NC_a^b + DC_b^a$ significa che

DC_b^a è il disagio di tutti i cammini comuni, perciò deve accadere che $FC_b^a = 0$ in quanto $FC_b^a + DC_b^a = DC_a^b + FC_a^b$ e $FC_b^a + DC_b^a$ è per definizione il disagio subito dai cammini comuni quando chiudo a . Dal teorema 1 sappiamo che il disagio dei cammini comuni, quando chiudo sia a che b , è almeno

$$\text{MAX}(FC_b^a + DC_b^a, FC_a^b + DC_a^b), \quad \text{ma allora} \quad FC_b^a + DC_b^a \geq FC_a^b + DC_a^b.$$

$FC_a^b + DC_a^b$ deve però essere diverso da $FC_b^a + DC_b^a$ perchè altrimenti potrebbero esistere casi in cui $FC_b^a + DC_b^a = DC_a^b + FC_a^b = 0$ che andrebbero contro l'ipotesi, perciò $FC_b^a + DC_b^a > FC_a^b + DC_a^b$.

Passiamo ora a dimostrare la parte sufficiente.

Per il teorema 1 ci è sufficiente dimostrare che il disagio dei cammini comuni è esattamente DC_b^a . Se $FC_b^a + DC_b^a > FC_a^b + DC_a^b$ allora $FC_b^a + DC_b^a > 0$ (il disagio non può essere negativo) e più precisamente, grazie alla seconda parte dell'ipotesi,

$DC_b^a > 0$. Se il disagio dei cammini comuni, quando chiudo a , è maggiore di zero allora non esistono cammini fortemente comuni ($fc_b^a = \emptyset$), perchè se così non fosse dovrebbero avere disagio δ nullo ($FC_b^a = 0$ per ipotesi) ma questo è impossibile perchè altrimenti ci sarebbero cammini debolmente comuni che percorrerebbero una strada più lunga del necessario. Illustriamo il concetto appena espresso con la figura (2.17):

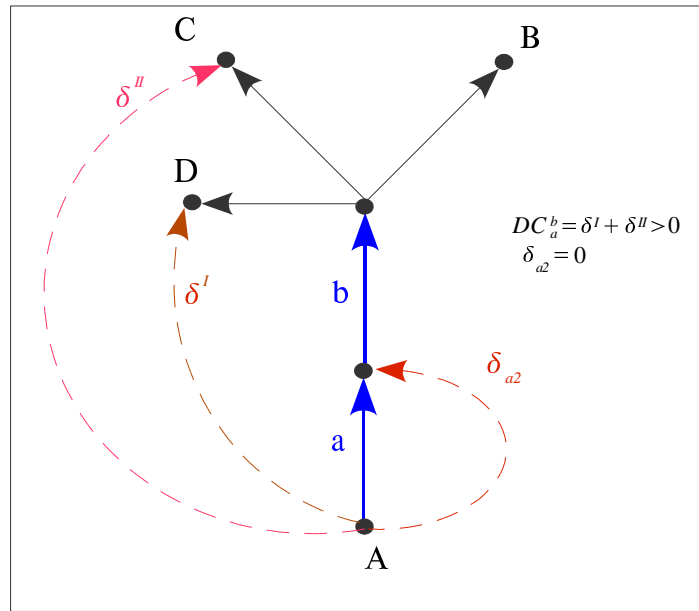


Figura 2.17: Caso 13

In figura (2.17) i cammini che partono da A per arrivare in B sono fortemente comuni per l'arco a ; i cammini che vanno da A a C e da A a D sono invece debolmente comuni. Deve perciò accadere che $\delta^{I-IV} > 0$ o $\delta^{I-III} > 0$ (perchè $DC_b^a = \delta^I + \delta^{II} > 0$), ma in entrambi i casi, sarebbe percorso un cammino che non è quello minimo, perchè sarebbe più conveniente passare ancora per b , non subendo così disagio; ma se così fosse si avrebbe $DC_b^a = 0$ contro ciò che abbiamo appena dimostrato. Per quanto detto in precedenza $|dc_b^a| = |fc_b^a| + |dc_b^a| = |fc_a^b| + |dc_a^b|$, cioè alla chiusura di a tutti i cammini comuni sono debolmente comuni, quindi la chiusura di b non li influenza ed il disagio dei cammini comuni è DC_b^a ■

2.2.3 Archi di zona

Definiamo archi di zona quegli archi a e b tali per cui:

$$r_a^b * r_b^a < 0$$

(2.34)

Sperimentalmente abbiamo osservato che il loro numero è molto limitato (circa 1% del totale degli archi). Gli indici di dipendenza con segno opposto indicano che la chiusura di un arco influenza i cammini comuni, mentre la chiusura dell'altro influenza quelli non comuni. Questa complessa situazione è rappresentata in figura (2.18).

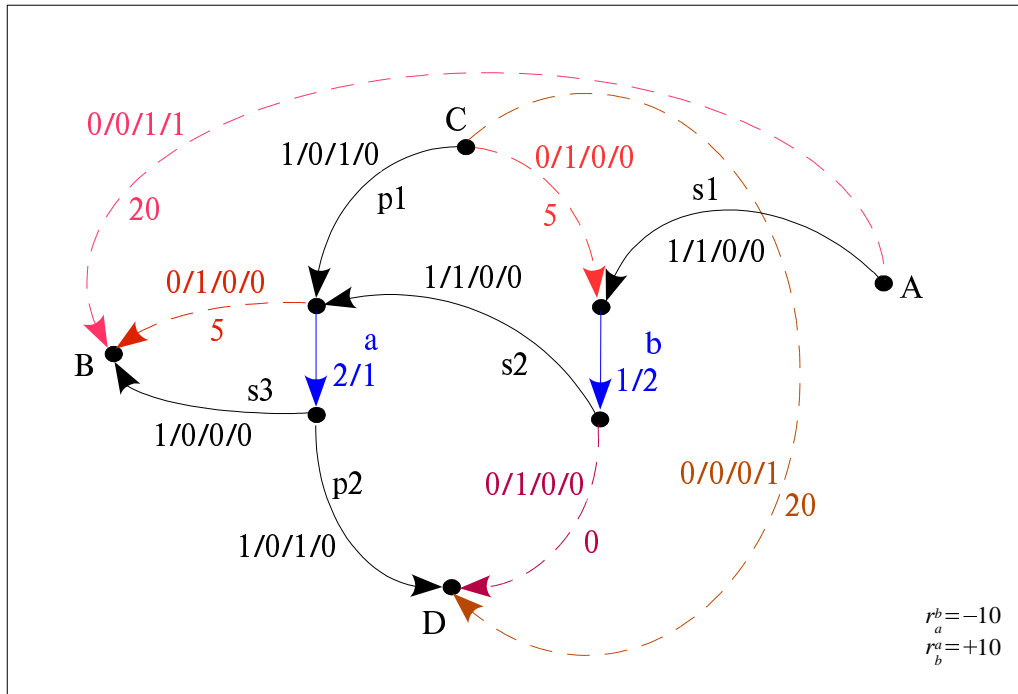


Figura 2.18

La figura 2.18 mostra due cammini: uno parte da A e arriva a B passando per s1, b, s2, a e s3; l'altro invece parte da C transita per p1, a, p2 fino a giungere in D. La chiusura di a modifica solo C-D, che deve percorrere b, mentre A-B è un cammino fortemente comune. Al contrario la chiusura di b lascia il cammino C-D inalterato, mentre il cammino A-B diventa debolmente comune abbandonando l'arco a. I due archi a e b sono perciò archi di zona.

In generale queste coppie, se chiuse, provocano un disagio abbastanza elevato, ciò è dovuto alla loro particolare posizione in relazione a regioni diverse del grafo. La stima del disagio provocato dalla loro chiusura non è molto precisa come si può vedere nell'appendice E.

Gli archi di zona sono però utili perchè forniscono indicazioni su come suddividere il grafo in zone (da qui il loro nome). Approfondiamo questo aspetto nel capitolo 3.

2.3 Chiusura di più archi

La stima del disagio dovuto alla chiusura di più di due archi è una estensione di quella per coppie di archi. Analizziamo infatti tutte le relazioni esistenti tra le coppie di archi che devono essere chiusi. Per fare questo utilizziamo gli stimatori D_H e D_V descritti nel paragrafo precedente.

Dividiamo la stima D^X in due parti: nella prima sommiamo i disagi causati dalla chiusura singola degli archi (Δ^a), nella seconda aggiungiamo i termini correttivi in base agli indici di dipendenza.

La prima parte della stima è:

$$D_1^X = \sum_{a \in X} \Delta^a$$

(2.35)

Nella seconda parte consideriamo le relazioni in serie ed in parallelo tra gli archi.

Ricaviamo i termini correttivi per la serie. Lo stimatore D_V è:

$$D_V^{ab} = NC_b^a + NC_a^b + MAX(CC_b^a, CC_a^b) + 0.5 MIN(CC_b^a, CC_a^b)$$

(2.36)

sappiamo però che il disagio causato dalla chiusura di un arco a , in serie con b , può essere scomposto nei termini:

$$\Delta^a = NC_b^a + FC_b^a + DC_b^a$$

(3.37)

Sostituendo in (2.36) i termini relativi ai cammini non comuni, con la (2.37), otteniamo:

$$D_V^{ab} = D^a - CC_b^a + D^b - CC_a^b + MAX(CC_b^a, CC_a^b) + \alpha MIN(CC_b^a, CC_a^b)$$

(2.38)

dunque la (2.38) diventa:

$$D^{ab} = \Delta^a + \Delta^b + (\alpha - 1) \text{MIN}(CC_a^b, CC_b^a)$$

il termine $(\alpha - 1) \text{MIN}(CC_b^a, CC_a^b)$ è la correzione cercata. Estendendolo a tutti gli archi chiusi, che presentano cammini comuni, abbiamo:

$$\sum_{b \in X} (1 - \alpha) \text{MIN}(CC_a^b, CC_b^a) \quad (2.39)$$

La (2.39) rappresenta i termini correttivi da aggiungere per gestire le relazioni in serie tra il nuovo arco a da chiudere e tutti gli archi in X .

Per ricavare i termini correttivi del parallelo definiamo la matrice R^+ come:

$$r_a^{b+} = \begin{cases} r_a^b & \text{se } r_a^b \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.40)$$

In R^+ abbiamo solo gli indici di dipendenza degli archi in parallelo. I termini correttivi per il parallelo corrispondono a quelli dello stimatore $D_{||}$:

$$D_{||}^{ab} = \Delta^a + \Delta^b + r_a^b * \frac{\Delta^a}{N_a} + r_b^a * \frac{\Delta^b}{N_b} \quad (2.41)$$

Quindi la chiusura di un arco a , che si trova in parallelo con archi di X , porta ad aggiungere i seguenti termini:

$$\sum_{b \in X} \left(r_a^{b+} \frac{D_a}{N_a} + r_b^{a+} \frac{D_b}{N_b} \right)$$

(2.42)

La seconda parte della stima può perciò essere scritta come la somma della (2.39) e della (2.42), dove con μ_{ab} indichiamo il termine correttivo dovuto alla relazione tra gli archi a e b :

$$\mu_{ab} = (\alpha - 1) \text{MIN} (CC_a^b, CC_b^a) + \left(r_a^{b+} \frac{D_a}{N_a} + r_b^{a+} \frac{D_b}{N_b} \right)$$

$$D_{\text{OR}}^X = \sum_{b \in X} \mu_{ab}$$

(2.43)

I termini correttivi della serie sono aggiunti anche in caso di archi in parallelo, infatti è sufficiente che ci siano dei cammini comuni. Solo gli archi paralleli puri non hanno termini correttivi per la serie.

La formula di stima per più archi può allora essere scritta come la somma di D_1^X e D_2^X :

$$D^X = \sum_{a \in X} \Delta^a + \sum_{a \in X} \sum_{(b > a) \in X} \mu_{ab}$$

Le condizioni (2.17), (2.20) e (2.33), utilizzate per la stima della chiusura di due archi, sono impiegate anche nella stima del disagio provocato da più archi. Devono infatti essere verificate tra tutte le coppie di archi che si vogliono chiudere. Se ciò non avviene la sequenza degli archi viene scartata.

Per la stima relativa a più archi non siamo in grado di fare una trattazione come quella svolta per la chiusura di solo due archi. Non siamo cioè in grado di studiare i casi in cui la stima compie un errore molto superiore alla media, perchè i cammini possono essere di molti tipi. Anche solo per tre archi i tipi di cammini da considerare sono ben 18, a causa di tutte le possibili relazioni: nc_a^b , dc_a^b , fc_a^b , nc_b^c , dc_b^c , fc_b^c , nc_c^a , dc_c^a , fc_c^a , nc_c^b , dc_c^b , fc_c^b . Inoltre, diversamente dalla chiusura di due archi, gli insiemi nc_a^b non sono tra loro

indipendenti.

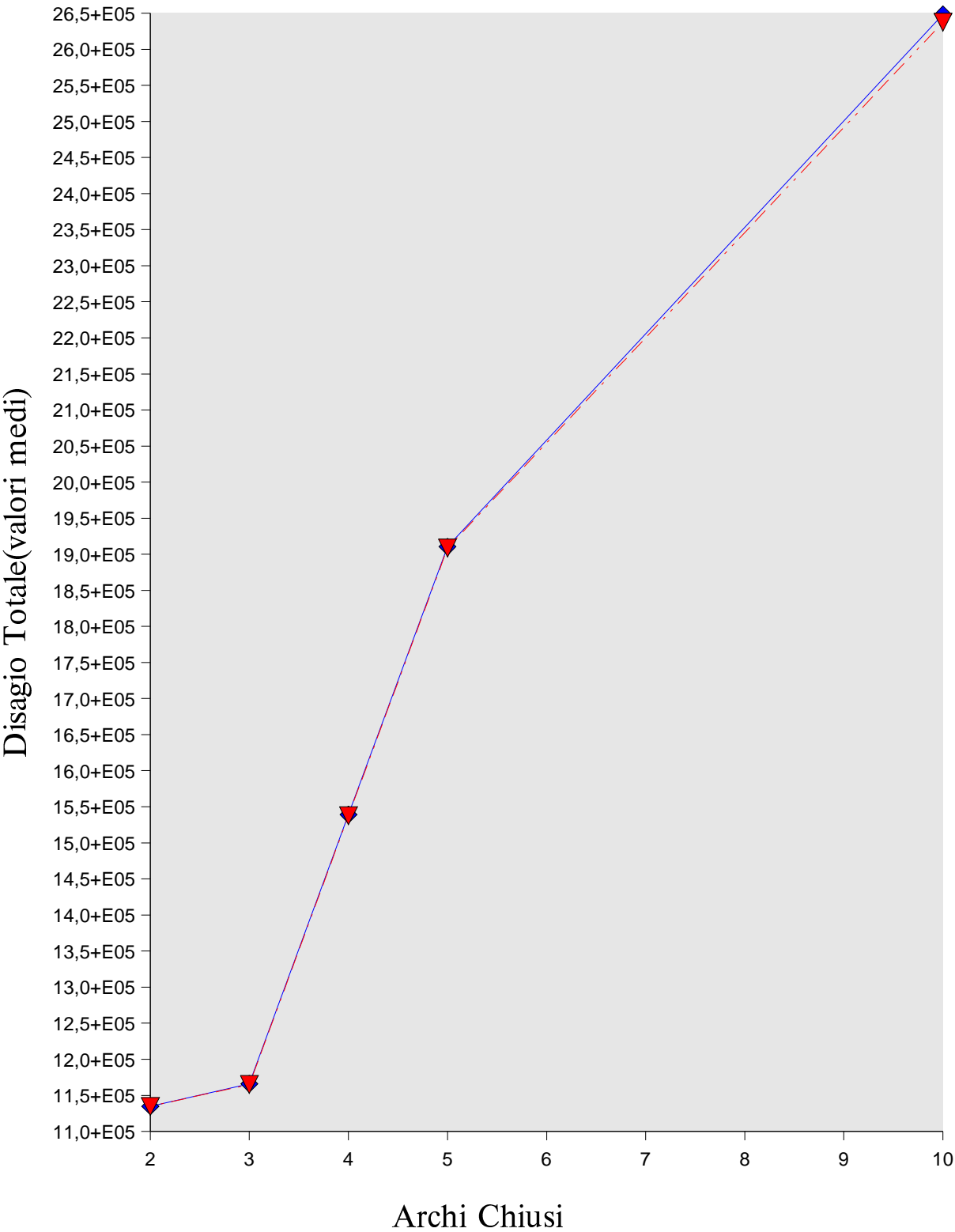


Figura 2.19

Archi Chiusi	Stima	Delta
2	1134791	1134756
3	1165949	1164913
4	1539193	1537503
5	1910430	1908546
10	2648410	2637480

La figura (2.19) è un esempio dell'andamento delle curve di disagio e stima media all'aumentare del numero di archi chiusi. Dove la linea continua indica la stima da noi effettuata mentre la linea tratteggiata il valore vero. Dalle prove effettuate risulta che il disagio reale è spesso leggermente sovrastimato da D^x .

Per un'analisi completa dei risultati vedere l'appendice E.

Capitolo3: Divisione in Zone

Gli archi di zona danno indicazione su come suddividere il grafo della città in sottografi corrispondenti a diverse zone. In questo problema non siamo in grado di stabilire una funzione obiettivo che ci permetta di confrontare le soluzioni. Abbiamo perciò considerato le suddivisioni già esistenti nelle città analizzate come soluzioni "migliori" e abbiamo poi confrontato con queste i risultati ottenuti dall'algoritmo.

3.1 Individuazione delle zone

Esistono cammini che vedono gli archi di zona in serie, mentre altri li vedono in parallelo: le origini e le destinazioni di questi due insiemi di cammini individuano le zone. La figura 3.1 riporta quattro zone: può anche capitare che le zone siano parzialmente sovrapposte e che quindi siano in numero inferiore.

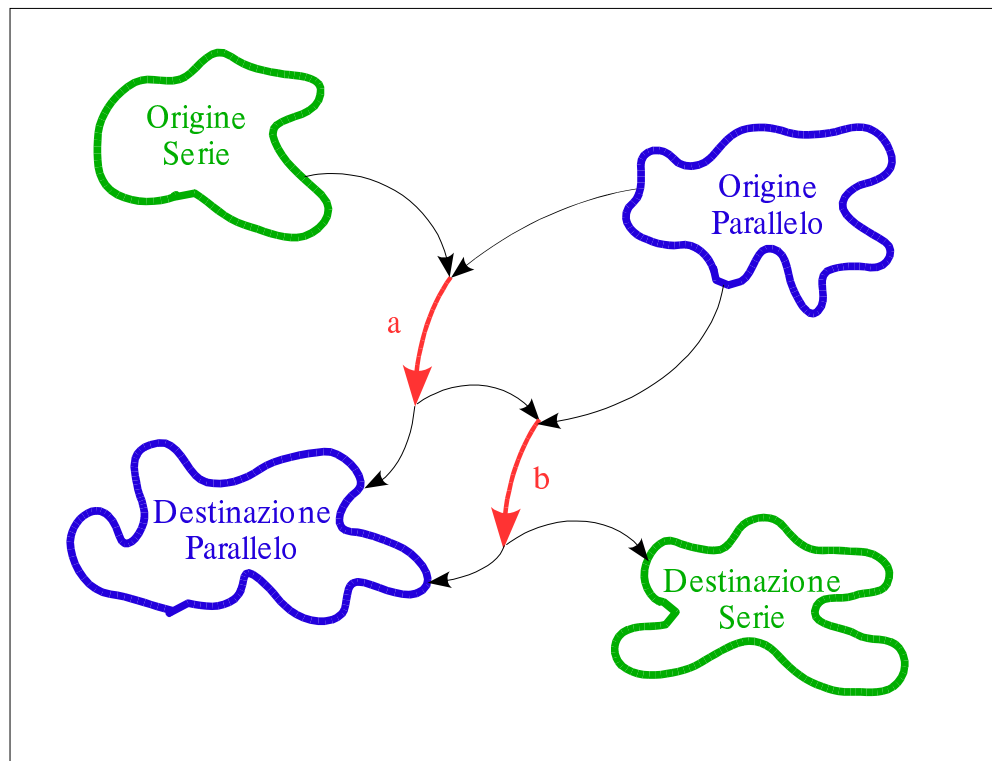


Figura 3.1: regioni individuate dagli archi di zona

La zonizzazione non dipende dal traffico, bensì dalla struttura del grafo. Per questo motivo si considera

la matrice \bar{R} degli indici di dipendenza, in cui non è considerato il traffico. Questa matrice può contenere un maggior numero di archi di zona rispetto a R

Definiamo l'insieme degli archi di zona:

$$ZA = \{ \{a,b\} \in A^2 \mid \bar{r}_a^b * \bar{r}_b^a < 0 \}$$

(3.1)

Per individuare le zone, definite da un certo insieme di archi di zona, costruiamo una matrice O contenente, per ogni coppia di nodi, il numero di volte che questi si trovano in una stessa zona. Ossia il numero di volte che essi vedono gli archi di zona in serie od in parallelo.

Le zone che abbiamo ottenuto considerando solo le destinazioni dei cammini sono molto simili a quelle attese: è quindi opportuno restringere la ricerca delle zone alle sole destinazioni. Quindi O è una matrice triangolare. Il valore o_{ij} indica quanto è plausibile che i due nodi i e j appartengano alla stessa zona.

L'algoritmo per calcolare O è un'estensione di quello utilizzato per il calcolo di \bar{R} . In figura 3.2 riportiamo l'algoritmo che calcola R evidenziando le modifiche necessarie per ottenere O .

```

 $\forall \rho \in N$ 
   $\forall v \in N$ 
     $\forall i \in N$ 
       $b = PRED_{\rho}(v)$ 
      SE  $PRED_{\rho}^b(i) = PRED_{\rho}(i)$  ALLORA
         $a = PRED_{\rho}(i)$ 
        SE  $\{a, b\} \in ZA$  ALLORA
           $D = \emptyset$ 
          SE  $|SUCC_{\rho}^{*b}(i)| > |SUCC_{\rho}^{*}(i)|$ 
             $D = SUCC_{\rho}^{*b}(i) - SUCC_{\rho}^{*}(i)$ 
          SE  $|SUCC_{\rho}^{*}(i)| > |SUCC_{\rho}^{*b}(i)|$ 
             $D = SUCC_{\rho}^{*}(i) - SUCC_{\rho}^{*b}(i)$ 
           $\forall o \in D$ 
             $\forall d > 0 \in D$ 
               $o_{od} = o_{od} + 1$ 
          ALTRIMENTI
             $a = PRED_{\rho}(i)$ 
            SE  $\{a, b\} \in ZA$  ALLORA
               $\forall o \in SUCC_{\rho}^{*}(i)$ 
                 $\forall d > 0 \in SUCC_{\rho}^{*}(i)$ 
                   $o_{od} = o_{od} + 1$ 
             $a = PRED_{\rho}^b(i)$ 
            SE  $\{a, b\} \in ZA$  ALLORA

```

Figura 3.2: algoritmo per il calcolo di O

Vincoli

Le zone sono i sottoinsiemi di nodi più strettamente legati nella matrice O tra loro. Stabiliamo un valore minimo ϵ di appartenenza, un numero minimo di nodi per ogni zona ed il numero (z) di

zone che vogliamo trovare. Definiamo un grafo $T(N,B)$ dove:

$$B = \{(i,j) \in N^2 \mid o_{ij} \geq \epsilon\}$$

(3.3)

T contiene gli archi che collegano nodi con un legame superiore a ϵ . Trovare le zone corrisponde a trovare z sottografi connessi di cardinalità almeno k , non sovrapposti, nel grafo T . Le zone devono contenere nodi tanto più strettamente legati quanto maggiore è il loro numero. Vincoliamo quindi le zone non solo in base ad una cardinalità minima k , ma anche in base ad un valore minimo di appartenenza medio:

$$\frac{\epsilon}{n}$$

(3.4)

dove n è la cardinalità della zona, per la quale deve valere:

$$k \leq n \leq \frac{\epsilon}{\text{OR}}$$

(3.5)

In base alla (3.5) vengono scartate le componenti connesse troppo piccole o troppo debolmente legate rispetto alle loro dimensioni.

Tra i parametri z, k e OR esiste una relazione, infatti se fissiamo k e tracciamo il grafico del numero massimo di zone che si ricavano al variare di ϵ si ottiene il grafico seguente:

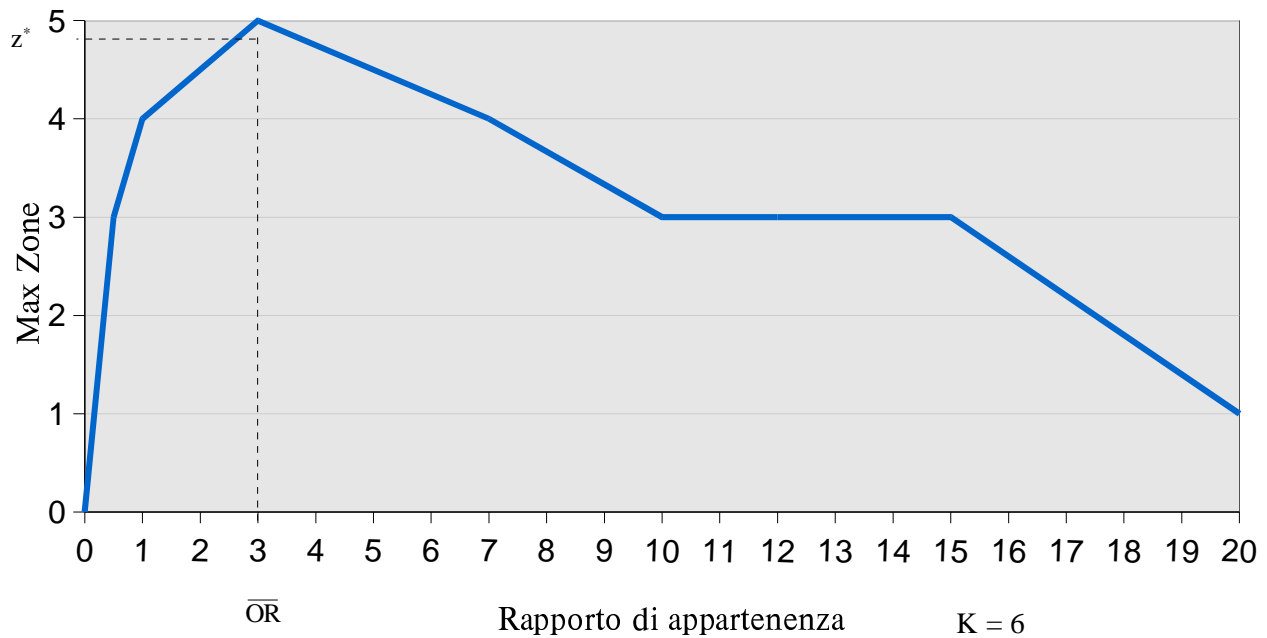


Figura 3.3: andamento del numero di zone al variare di \overline{OR}

Il grafico di figura (3.3) riporta l'andamento tipico che si ha nel calcolo delle zone (la curva è relativa a Ponteranica v. Appendice F). A valori bassi di \overline{OR} quasi tutto il grafo è connesso e perciò le zone sono poche. All'aumentare di \overline{OR} il numero di archi in T diminuisce aumentando il numero di componenti connesse e quindi il numero delle zone cresce fino a raggiungere il massimo di \overline{OR} . Per valori di $\overline{OR} > \overline{OR}$ il numero di zone diminuisce; questo effetto è dovuto al vincolo di cardinalità minima che diventa attivo: infatti le zone diventano sempre più piccole fino ad essere scartate per dimensioni troppo ridotte. Se tracciamo il grafico di figura 3.3, per diversi valori di k (figura 3.4), osserviamo come \overline{OR} tende ad aumentare al diminuire di k . Questo significa che anche con piccoli valori di ϵ possiamo ricavare molte zone. All'aumentare di k , invece, \overline{OR} diventa sempre più piccolo e di conseguenza la curva inizia a scendere per valori sempre più piccoli di \overline{OR} . Inoltre anche z^* , che rappresenta il numero di zone quando $\overline{OR} = \overline{OR}$, diminuisce, a causa della difficoltà di trovare zone abbastanza grandi. Quindi la curva tende ad abbassarsi.

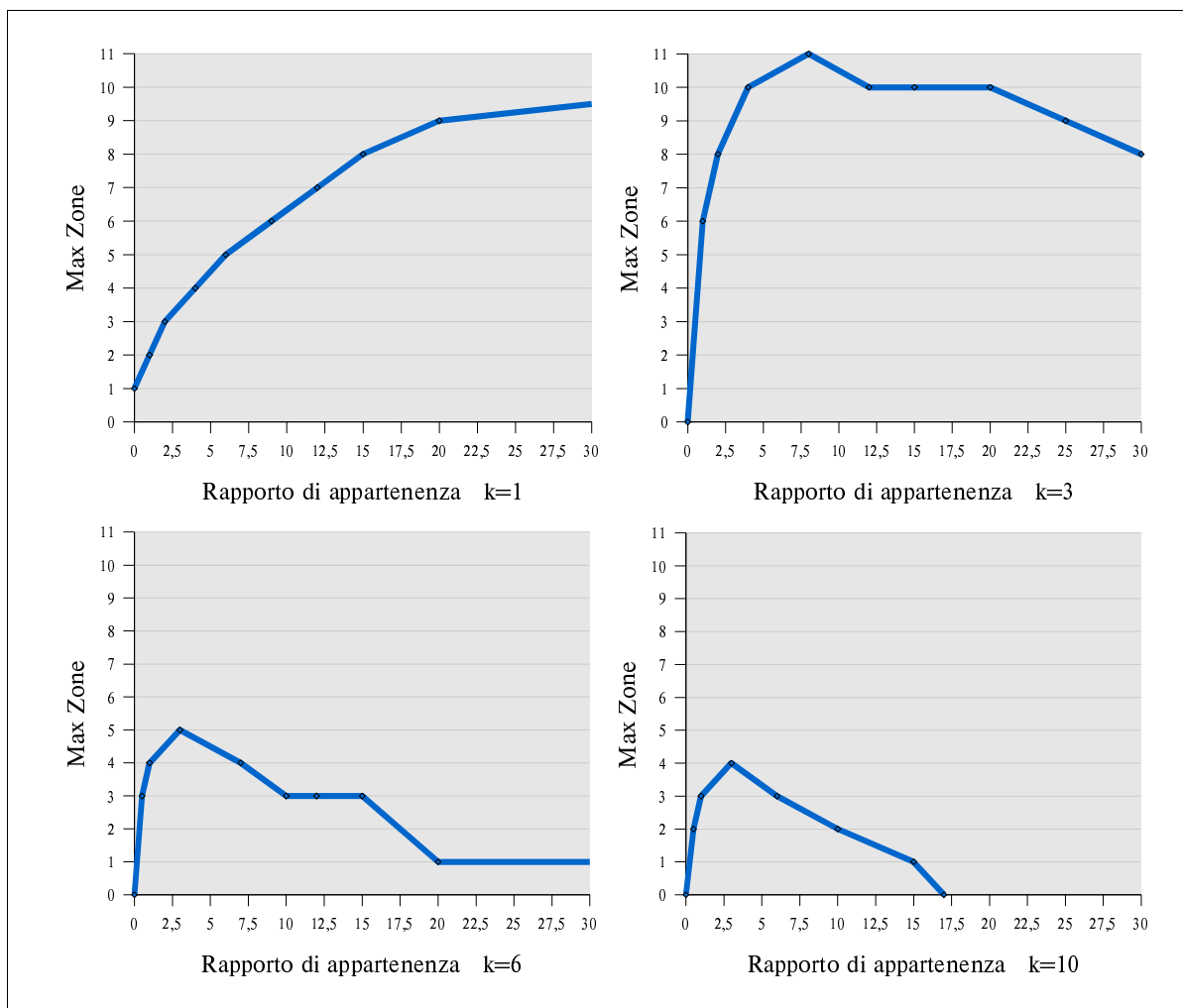


Figura 3.4: analisi del parametro k

Sappiamo, che per trovare un alto numero di zone, dobbiamo imporre $OR > \overline{OR}$.

Consideriamo però cosa accade alle singole zone all'aumentare di OR : ognuna incomincia a suddividersi in due o più zone più piccole, l'unione di queste però può non coprire tutti i nodi compresi nella zona originaria.

Chiamiamo *nodi isolati* i nodi che non appartengono a nessuna zona. I nodi isolati si trovano sul confine delle zone e sono debolmente legati, tanto da non essere in grado di riunirsi in una nuova regione. Ottenere il massimo numero di zone non significa necessariamente avere una buona suddivisione perchè il numero di nodi isolati è elevato. Un esempio di questo fenomeno è riportato nella sequenza di figure 3.5, .36, 3.7. Con l'aumentare di OR i nodi isolati aumentano, rimpicciolendo le zone, fino ad ottenere (figura 3.7) solo i nuclei delle zone avendo nel frattempo perso quasi la metà dei

nodi.

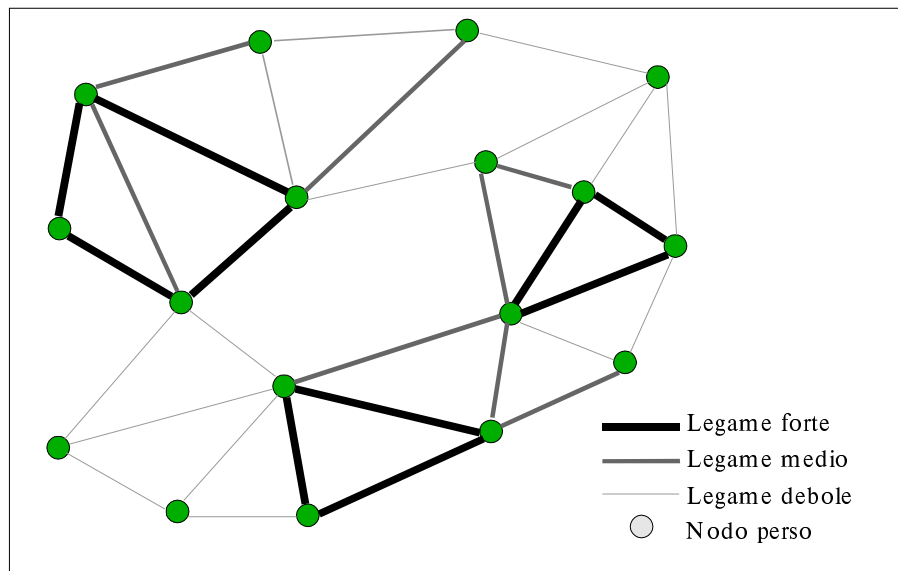


Figura 3.5: nodi appartenenti ad una sola regione

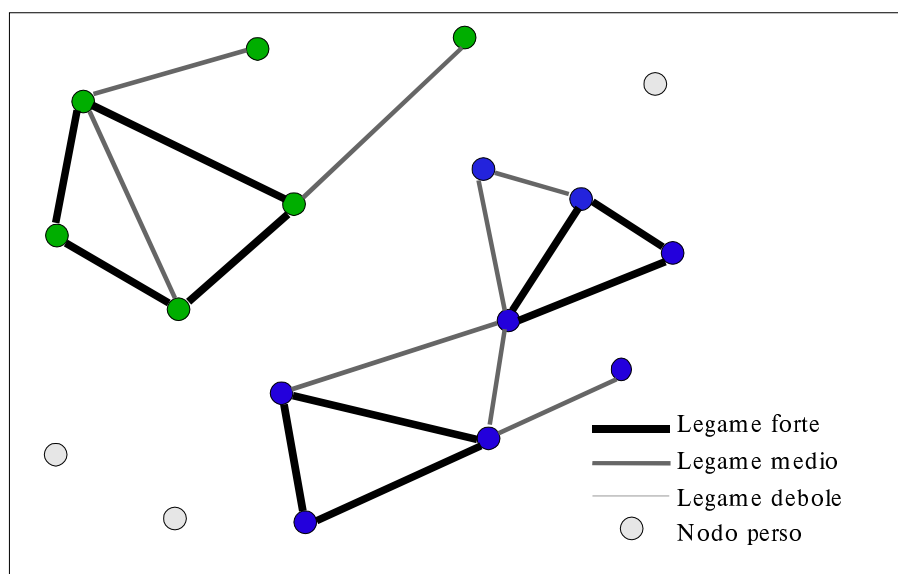


Figura 3.6: zone ottenute dopo una prima suddivisione

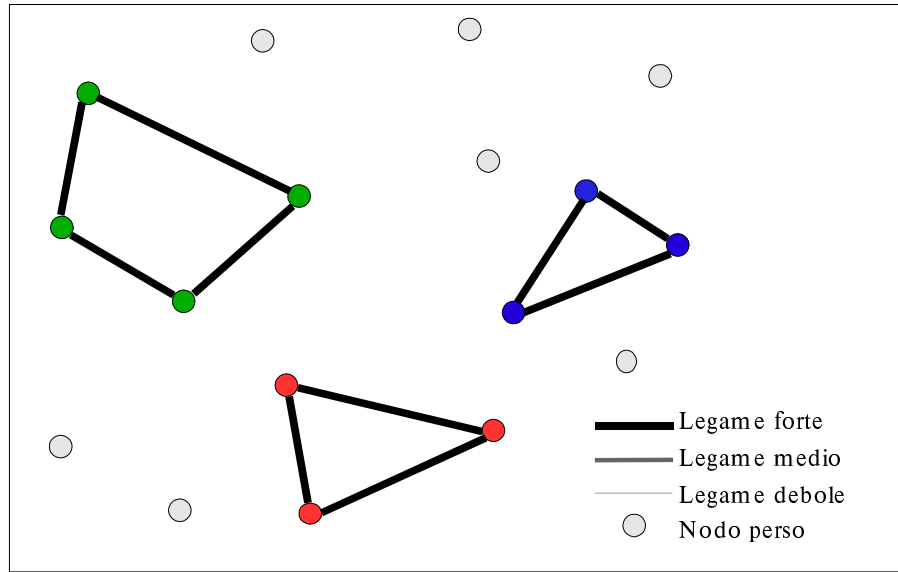


Figura 3.7: nuclei centrali delle regioni

Se avessimo proseguito nell'aumentare OR avremmo incominciato ad eliminare zone a causa del vincolo di cardinalità minima. L'effetto di perdita dei nodi è responsabile, insieme al vincolo su k , della diminuzione di zone per $OR > \overline{OR}$

Le suddivisioni che abbiamo adottato (v. appendice F) sono state ottenute scegliendo un valore di $OR < \overline{OR}$; ci siamo cioè sempre limitati alla parte iniziale del grafico OR, z . Nonostante questo alcuni nodi isolati sono ancora presenti; perciò abbiamo assegnato questi nodi alle zone attraverso un algoritmo di completamento.

3.2 Algoritmo di completamento

Indichiamo con Z_i la zona alla quale appartiene in nodo i . Definiamo inoltre L come l'insieme dei nodi persi. L'algoritmo, per ogni $i \in L$, controlla in che zona si trova il vicino (j) , con $j \notin L$, a cui i è più legato: se j esiste allora appartiene ad una zona e quindi anche i ne entra a far parte; se j non esiste significa che tutti i suoi vicini appartengono ad L . In quest'ultimo caso si considera il successivo nodo isolato (l'ordinamento è casuale), ritornando più tardi a considerare i . La figura

3.8 riporta l'algoritmo di completamento.

```
MENTRE ( $L \neq \emptyset$ )  
   $\forall i \in L$   
    best_o = 0  
     $\forall (i, v) \in A$   
      SE ( $o_{iv} > \text{best\_o} \wedge (v \notin L)$ ) ALLORA  
         $j = v$   
         $\text{best\_o} = o_{iv}$   
      SE  $\text{best\_o} > 0$   
         $Z_i = Z_j$   
         $I = I - i$ 
```

Figura 3.8

Con questo algoritmo non intendiamo realizzare il miglior completamento possibile, ma semplicemente mostrare come si possa realizzare la divisione in zone.

Capitolo 4 Algoritmi per il modello lineare

Il modello, descritto nel capitolo 1, è a due obiettivi. E' però molto più comune la richiesta di ricavare un numero preciso di parcheggi, rispetto a limitare il disagio con un valore difficilmente quantificabile, perciò trasformiamo l'obiettivo di massimizzare il numero di parcheggi nel vincolo di ricavarne almeno una quantità P . L'obiettivo quindi è di minimizzare il disagio.

$$\begin{aligned} & \text{MIN } \Delta^X \\ & \text{s.t.} \\ & \begin{cases} \sum_{a \in A} x_a p(a) \geq P \\ x_a + x_{\bar{a}} \leq 1 \\ x_a \in \{0,1\} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall a, \bar{a} \in A \\ \forall a \in A \end{matrix} \end{aligned}$$

(4.1)

Gli algoritmi sviluppati in questo capitolo non pretendono di essere le tecniche migliori per risolvere il modello lineare, ma semplicemente di dimostrarne la sua validità. Infatti, nonostante gli algoritmi illustrati siano semplici, i risultati sono significativi.

4.1 Modello di P.L.I

La formula di stima del disagio ci consente di linearizzare il modello (4.1):

$$\begin{aligned} & \text{MIN } D^X = \sum_{a \in A} x_a \Delta^a + \sum_{a \in A} \sum_{b > a \in A} y_{ab} \mu_{ab} \\ & \text{s.t.} \\ & \begin{cases} \sum_{a \in A} x_a p(a) \geq P & (1) \\ y_{ab} \geq x_a + x_b - 1 & \forall a, b \in A & (2) \\ x_a + x_{\bar{a}} \leq 1 & \forall a, \bar{a} \in A & (3) \\ x_a \in \{0,1\} & \forall a \in A \\ y_{ab} \in \{0,1\} & \forall a, b \in A \end{cases} \end{aligned}$$

(4.2)

Al modello si possono anche aggiungere vincoli della forma:

$$x_a + x_{\bar{a}} = 1$$

relativi a quelle strade strette che devono obbligatoriamente essere a senso unico.

Il modello (4.2) è un modello di programmazione lineare intera e rappresenta un'approssimazione di (4.1). La soluzione ottima di questo secondo modello si avvicina molto alla soluzione di (4.1), questo grazie al buon andamento della stima D^X .

Il modello (4.2) rappresenta un problema nuovo: costruiamo un grafo ausiliario $G_r(A, R)$ completo, che contiene tanti nodi quanti sono gli archi di G . Associamo al grafo tre differenti pesature, due sui nodi ed una sugli archi. Ogni nodo a possiede un primo peso p_a , che rappresenta il numero di parcheggi ricavati chiudendo a ed un secondo peso Δ^a , che indica il disagio provocato dalla chiusura dell'arco. Ogni arco (a, b) di G_r è pesato col termine correttivo μ_{ab} . Bisogna trovare in G_r l'insieme di nodi che minimizza D^X e che ricava almeno P parcheggi.

Le dimensioni del modello (4.2) crescono come il quadrato del numero di archi presenti nel grafo G (strade della città), che indichiamo con m . Le variabili x sono m , mentre le y sono $\frac{m(m-1)}{2}$. Per quanto riguarda i vincoli ne esiste solo uno relativo di parcheggi (1); ve ne sono $\frac{m(m-1)}{2}$ di tipo (2) ed $\frac{m}{2}$ di tipo (3).

Il modello (4.2) è perciò costituito da:

$$\begin{array}{ll} \frac{m(m-1)}{2} + m & \text{variabili} \\ \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m}{2} + 1 & \text{vincoli} \end{array}$$

I casi reali considerati hanno alcune centinaia di archi (v. appendice A), per cui il modello ha dimensioni nell'ordine di 10^5 variabili e vincoli.

4.2 Algoritmi

La complessità del problema e la necessità di ottenere una soluzione in tempi ragionevoli, ci ha portato a scrivere un algoritmo euristico. Non cerchiamo perciò la soluzione migliore, ma una soluzione che ha i presupposti per essere buona.

In questo paragrafo parliamo di nodi indicando i nodi del grafo G_r , che corrispondono agli archi del grafo G .

L'algoritmo risolutivo ordina, in un vettore \bar{b} , i nodi in base al disagio per parcheggio. Si stabilisce cioè un costo, in disagio, per ogni parcheggio acquisito.

L'ordinamento avviene cioè sul valore:

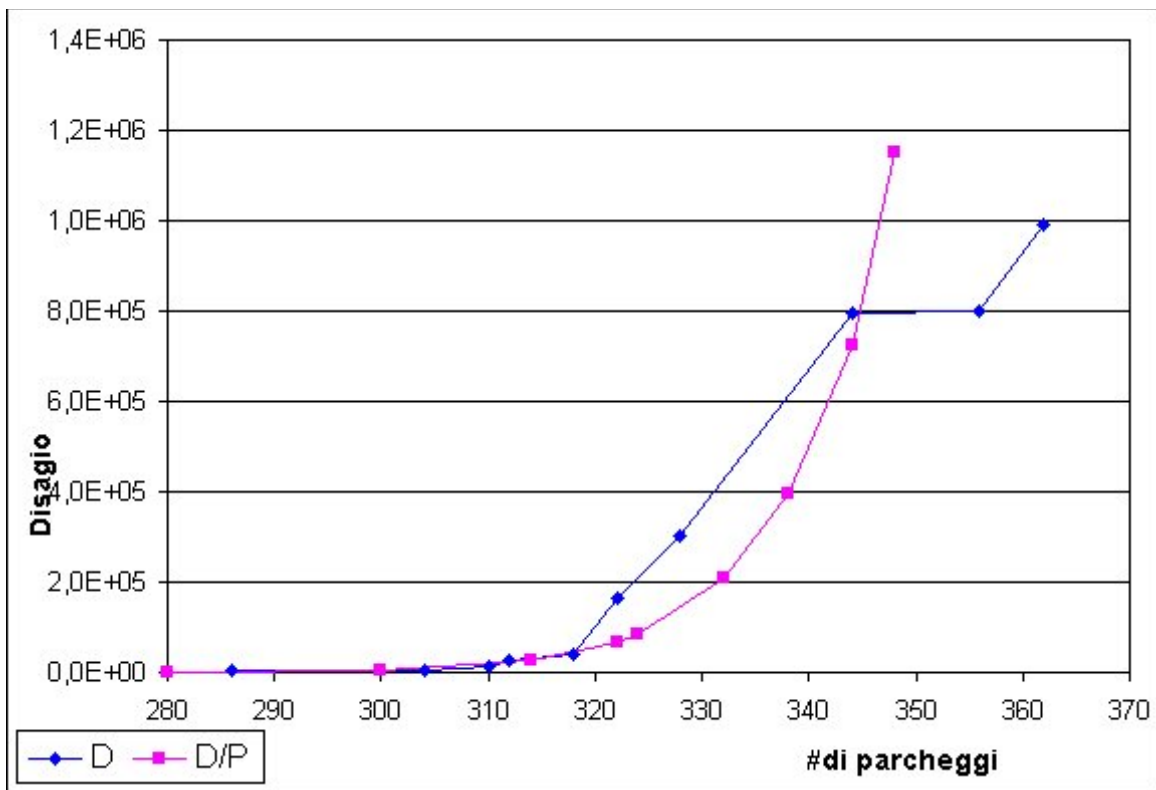
$$\frac{\Delta_a}{P_i}$$

Scandendo poi \bar{b} si estraggono tanti insiemi di nodi quanti sono i nodi stessi (archi nel grafo G), e la cui somma di parcheggi è almeno P . Tra questi insiemi candidati, si controlla che nessun arco abbia un peso al di fuori di un intervallo prefissato, (tipicamente $[-50,50]$ v. appendice E) e si sceglie l'insieme di minor disagio.

Effettuando una serie di prove sul comune di Trezzo si sono ottenuti i seguenti risultati:

Parcheggi	Disagio
286	2934
304	5560
310	14876
312	25197
318	39053
322	166392
328	301076
344	797716
356	802186
362	992218

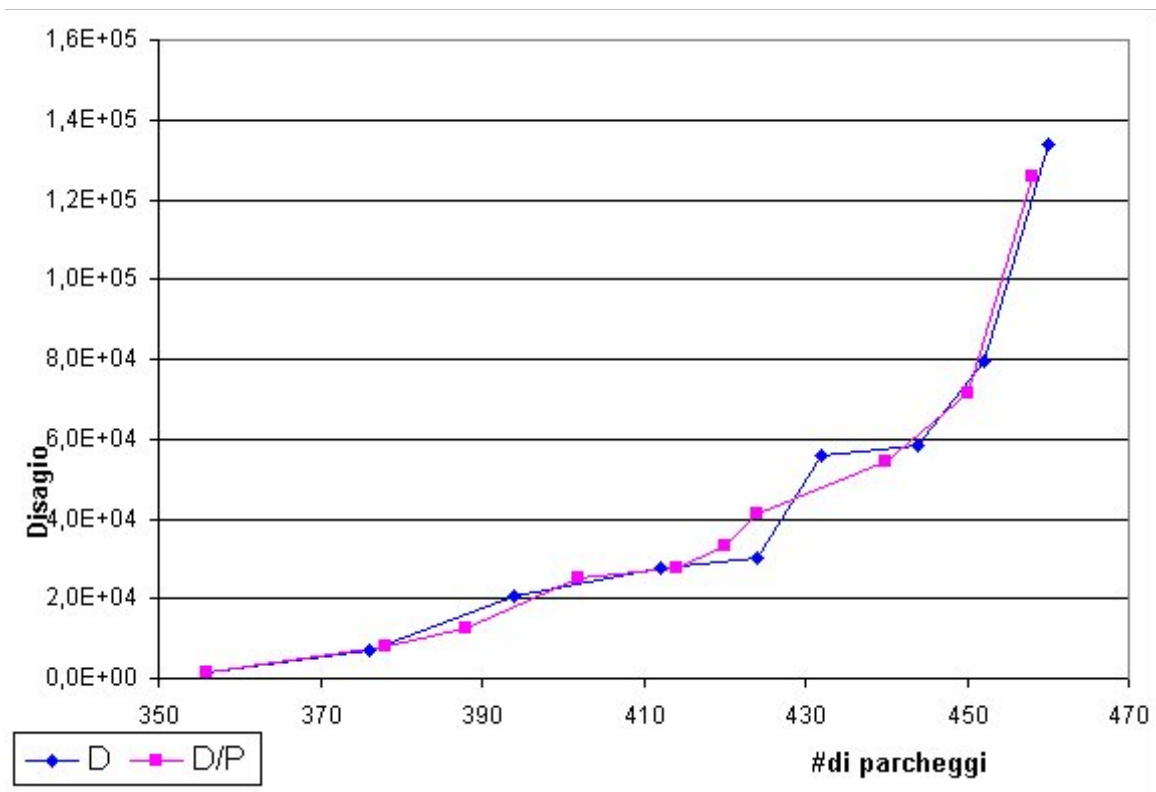
Parcheggi	Disagio
280	585
300	5560
314	28315
322	64875
324	84775
332	207461
338	397493
344	723418
348	1149096



Confrontando questo criterio di ordinamento con quello utilizzato in “Metodi per l’ottimizzazione dei parcheggi” [2], è possibile osservare che la curva tende ad avere un andamento più uniforme, ci sono cioè meno sbalzi. Lo stesso fenomeno lo si osserva anche per il comune di Ponteranica.

Parcheggi	Disagio
356	1748
376	6863
394	20696
412	27743
424	30226
432	55663
444	58142
452	79373
460	133821

Parcheggi	Disagio
356	1748
378	8089
388	12504
402	25026
414	27505
420	33413
424	41509
440	54116
450	71288
458	125736



Da notare come l'ordinamento utilizzato tenda a cercare maggiormente i parcheggi rispetto a quello in [3]. Per questo motivo riesce effettivamente a trovare un numero più elevato di parcheggi. Si ha però lo svantaggio di disagio generalmente peggiore.

Dai grafici possiamo vedere le soluzioni *paretotime*, cioè quelle soluzioni che non possono essere confrontate tra loro per stabilire qual'è la migliore. La scelta della soluzione più adatta dipende perciò dalle esigenze sul numero di parcheggi.

4.3 Dispersione dei parcheggi

L'algoritmo di risoluzione considera ugualmente valide le soluzioni che concentrano i parcheggi rispetto a quello che li disperdono su tutta la città. Vincoliamo la soluzione in modo da richiedere un numero di parcheggi differente per ogni zona del grafo.

Utilizziamo perciò, al posto di un valore P di parcheggi, un vettore \bar{P} dove ogni sua componente

\bar{P}_k rappresenta quanti parcheggi vogliamo trovare nella k-esima zona.

$$MIN D^X = \sum_{a \in A} x_a \Delta^a + \sum_{a \in A} \sum_{b > a \in A} y_{ab} \mu_{ab}$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_{a \in A} x_a p(a) \geq P_k & 1 \leq k \leq nz \\ y_{ab} \geq x_a + x_b & \forall a, b \in A \\ x_a + x_{\bar{a}} \leq 1 & \forall a, \bar{a} \in A \\ x_a \in \{0, 1\} & \forall a \in A \\ y_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b \in A \end{cases}$$

(?.3)

Il modello (?.3) sostituisce il vincolo sui parcheggi con tanti vincoli sul numero di parcheggi quante sono le zone del grafo (nz).

L'aggiunta delle zone modifica il modo in cui l'algoritmo costruisce delle soluzioni candidate: gli archi appartenenti a zone in cui i parcheggi sono già un numero sufficiente saranno infatti scartati.

5 Estensioni del modello

Il lavoro svolto è un valido punto di partenza per diversi approfondimenti, ne citiamo alcuni:

Capacità delle strade

Nel modello analizzato non sono considerate le capacità delle strade. Può cioè accadere che la soluzione ottenuta, chiudendo un insieme di archi, non sia attuabile, perchè le strade alternative utilizzate non sono in grado di ricevere tutto il traffico.

La figura 5.1 mostra due strade a e b , ad alta capacità (le macchine sono su differenti corsie), percorse da un alto numero di utenti.

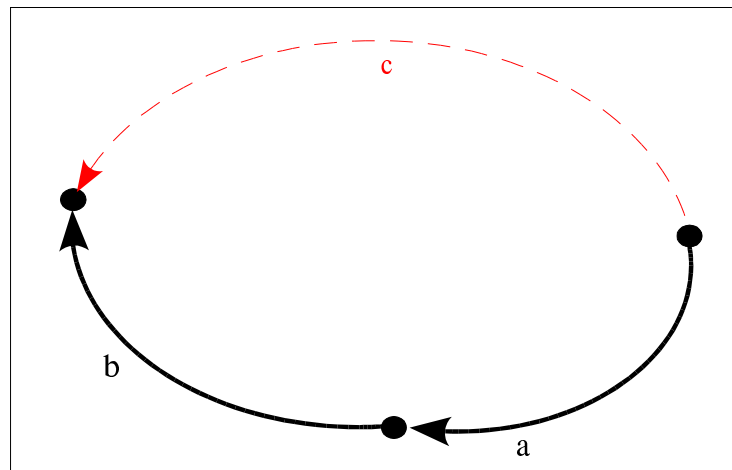


Figura 5.1: archi con alta capacità

La scelta di chiudere a e b appare conveniente perchè la strada c provoca poco disagio agli utenti. Purtroppo c ha una capacità molto minore di a e b (potrebbe trattarsi di una strada stretta), quindi si crea coda e gli utenti subiscono un disagio molto maggiore di quello che ci si aspetterebbe (figura 5.2).

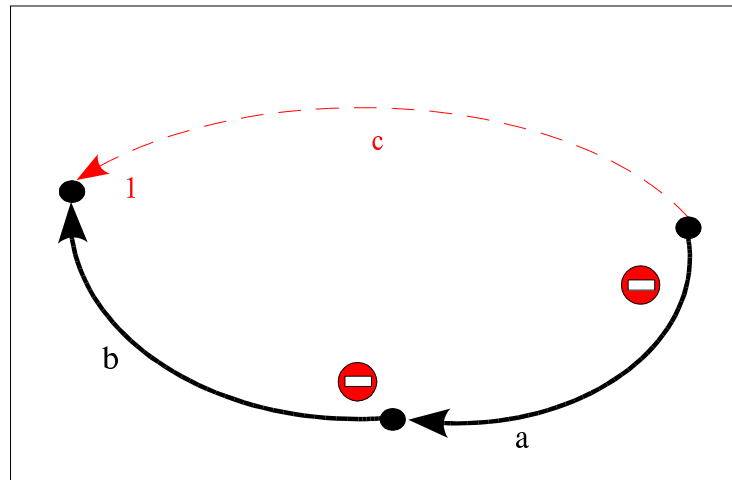


Figura 5.2: coda dovuta alla bassa capacità di c

Disconnessione del grafo

Esiste la possibilità di sconnettere il grafo, cioè potrebbe quindi accadere di chiudere un insieme di strade che rende irraggiungibili una o più destinazioni. Questo effetto è indesiderato perché significherebbe che esistono zone irraggiungibili della città, situazione che nella realtà non sarebbe tollerata.

Tecniche risolutive

Per risolvere il modello lineare del problema si possono adottare tecniche differenti da quella utilizzata da noi. Si possono sviluppare euristiche basate sulla ricerca locale, tecniche di tipo genetico, oppure cercare di risolvere il modello in modo esatto con tecniche di programmazione lineare: come ad esempio i piani di taglio, tecniche branch & cut, e vari tipi di rilassamenti.

Integrazione con altri software

Dal punto di vista software, una estensione molto interessante è l'integrazione con simulatori (ad esempio Emme2), in modo da disporre di un unico prodotto che utilizza sia tecniche di programmazione matematica che tecniche di simulazione.